

Einführung in die Geometrie und Topologie

Dozent
DANIEL KASPROWSKI

Assistentin
ARUNIMA RAY

Mitschrift
MAXIMILIAN KESSLER

Version
git: v2.4.0-beta-2-ge70f33e
kompiliert: 8. Oktober 2021 19:03

Zusammenfassung

Bei folgenden Vorlesungsnotizen handelt es sich um (inoffizielle) Mitschriften zur 'Einführung in die Geometrie und Topologie', die im Sommersemester 2021 an der Universität Bonn gehalten wird. Ich garantiere weder für Korrektheit noch Vollständigkeit dieser Notizen, und bin dankbar für jegliche Art von Korrektur, sowohl inhaltlich, als auch Tippfehler. Schreibt hierzu eine [Mail](#), oder nutzt das [Issues](#) feature auf GitHub.

Weitere Informationen zu diesem Skriptum finden sich bei [GitHub](#) oder auf der [Vorlesungshomepage](#).

Inhaltsverzeichnis

Übersicht der Vorlesungen	4
0 Motivation und Überblick	7
I Mengentheoretische Topologie	8
1 Metrische Räume	8
2 Topologische Räume	11
3 Quotientenräume	17
4 Trennungsaxiome	23
5 Kompaktheit	27
6 Basen und Subbasen	38
7 Produkte	41
8 Vereinigungen	58
9 Zusammenhang, Wegzusammenhang	70
10 Lemma von Urysohn	76
11 Der Erweiterungssatz von Tietze	79
12 Der Metrisierungssatz von Urysohn	84
II Algebraische Topologie	87
Motivation	87
13 Kategorien	88
13.1 Einschub: Mengentheorie	88
13.2 Kategorien	89
13.3 Limiten und Kolimiten	98
14 Homotopien und die Fundamentalgruppen	104
15 Überlagerungen Teil 1	114
16 Beispiele für π_1	126
17 Überlagerungen Teil 2	131
18 Die universelle Überlagerung	141

19 Decktransformationen	149
20 Hauptsatz der Überlagerungstheorie	158
21 Der Satz von Seifert von Kampen	166
22 CW-Komplexe	179
22.1 Berechnung der Fundamentalgruppe eines CW Komplexes	182
23 Ausblick	189
III Anhang	190
A Übungsblätter	190
1. Übungsblatt	190
2. Übungsblatt	191
3. Übungsblatt	191
4. Übungsblatt	193
5. Übungsblatt	194
6. Übungsblatt	195
7. Übungsblatt	197
8. Übungsblatt	197
9. Übungsblatt	198
10. Übungsblatt	199
11. Übungsblatt	201
Stichwortverzeichnis	204
Bildquellen	206
Literatur	207

Übersicht der Vorlesungen

Vorlesung 1 (Di 13 Apr 2021)	7
Metrische Räume. Umgebungen, offene Mengen, Stetigkeit. Topologische Räume. Metrisierbarkeit.	
Vorlesung 2 (Do 15 Apr 2021)	12
Äquivalente Metriken. Abgeschlossene Mengen. Teilraumtopologie. Homöomorphismen. Quotientenräume und -topologie.	
Vorlesung 3 (Di 20 Apr 2021)	19
Torus, Kleinsche Flasche, Reeller Projektiver Raum. Trennungsaxiome: Hausdorff, normale und reguläre Räume. Kompaktheit.	
Vorlesung 4 (Do 22 Apr 2021)	28
Eigenschaften kompakter Hausdorffräume. Gerade mit zwei Ursprüngen. Heine-Borel. Homöomorphismen.	
Vorlesung 5 (Di 27 Apr 2021)	35
Weiteres zum reellen projektiven Raum und zu kompakten Hausdorffräumen. Basen, Subbasen. Erzeugte Topologie. Satz von Alexander.	
Vorlesung 6 (Do 29 Apr 2021)	41
Endliche Produkte. Projektionen auf Komponenten. Universelle Eigenschaft des Produkts. Produkte von kompakten und von Hausdorff-Räumen. Diagonaleigenschaft. Unendliche Produkte.	
Vorlesung 7 (Di 04 Mai 2021)	50
Universelle Eigenschaft unendlicher Produkte. Satz von Tychonoff. Abschluss, Dichtheit. Einbettungen. Kompaktifizierung. Vollständige Regularität. Universelle Eigenschaft der Stone-Čech-Kompaktifizierung. Fortsetzung stetiger Funktionen.	
Vorlesung 8 (Do 06 Mai 2021)	58
Disjunkte Vereinigungen. Koprodukte. Disjunkte Vereinigungen über einem Basisraum. Wedge-Produkte. Rekonstruktion eines Raumes als Disjunkte Vereinigung über dem Schnitt zweier Teilräume.	
Vorlesung 9 (Di 11 Mai 2021)	70
Zusammenhang, Wegzusammenhang. Bilder (weg-) zusammenhängender Räume. Lemma von Urysohn.	
Vorlesung 10 (Di 18 Mai 2021)	77
Beweis des Lemmas von Urysohn. Urysohn für beliebige Intervalle. Satz von Tietze. 'Quetschen' von stetigen Funktionen auf normalen Räumen. Beweis des Satz von Tietze. Metrisierungssatz von Urysohn.	
Vorlesung 11 (Do 20 Mai 2021)	84

Metrisierbarkeit des Hilbertraums. Beweis des Metrisierungssatzes von Urysohn. Motivation für die Einführung von Algebraischer Topologie sowie Kategorientheorie. Mengen und Klassen. Anfänge der Kategorientheorie: Kategorien, Unterkategorien, Isomorphismen, Funktoren.	
Vorlesung 12 (Di 01 Jun 2021)	93
Kontravariante Funktoren. Dualkategorie. Dualraum als Funktor. Natürliche Transformationen und natürliche Äquivalenz von Kategorien. Doppelter Dualfunktor als natürliche Transformation. Abelsonisierung von Gruppen. Diagramme. Initial- und Terminalobjekte. Diagramme. Kegel, Kegelkategorie. Limiten und Kolimiten: Produkt, Koprodukt, Faserprodukt, Pushout.	
Vorlesung 13 (Di 08 Jun 2021)	103
Gruppen und Gruppenwirkungen als Kategorien. Produkt- und Funktorkategorie. Wedge- und Smash-Produkt als Funktoren. Homotopie, die Homotopiekategorie \mathbf{hTop} , Homotopieäquivalenz. Schleifen. Die Fundamentalgruppe und ihr Operator \star . π_1 als Funktor $\mathbf{Top}_\star \rightarrow \mathbf{Grp}$	
Vorlesung 14 (Do 10 Jun 2021)	111
Wege $x \rightarrow x'$ induzieren Isomorphismen $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, x')$. Fundamentalgruppoiden. Überlagerungen. Lokale Homöomorphismen. Überlagerungen von S^1 , triviale Überlagerungen. Blätterzahl. Teaser der Liftungssätze.	
Vorlesung 15 (Di 15 Jun 2021)	119
Weghebungssatz. Lebesguelemma. Homotopieliftungssatz.	
Vorlesung 16 (Do 17 Jun 2021)	126
Bijektion zwischen Faser und Fundamentalgruppe für einfach zusammenhängende Überlagerungen. Fundamentalgruppe von S^1 . Einfacher Zusammenhang von \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ und S^n , $n \geq 2$. Stereographische Projektion $S^n \setminus \{\star\} \cong \mathbb{R}^n$. Lokal Wegzusammenhängende Räume und ihre Wegzusammenhangskomponenten. Überlagerungen über lokal wegzusammenhängenden Räumen. Allgemeiner Liftungssatz.	
Vorlesung 17 (Di 22 Jun 2021)	135
Beweis des allgemeinen Liftungssatzes. Charakteristische Untergruppe einer Überlagerung (an einem Punkt). Homöomorphe Überlagerungen. Injektivität von p_\star . Klassifikation der zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 . Semilokal einfachzusammenhängende Räume. Universelle Überlagerungen. Existenzsatz für universelle Überlagerungen.	
Vorlesung 18 (Do 24 Jun 2021)	143
Beweis des Existenzsatzes für universelle Überlagerungen: H -äquivalente Wege. Basis der Topologie von semilokal einfachzusammenhängenden, (lokal) wegzusammenhängenden Räumen. Decktransformationen	
Vorlesung 19 (Di 29 Jun 2021)	149
Decktransformationen von $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Normalisatoren. Gruppenisomorphismus $\Delta(p) \cong \frac{H}{N_{\pi_1(X, x_0)} H}$ zwischen Decktransformationen und Fundamentalgruppe. Gruppenwirkungen. Semidirekte Produkte und die Fundamentalgruppe des Torus $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.	

Vorlesung 20 (Do 01 Jul 2021)	155
Transitive Gruppenwirkungen. Orbit, Stabilisator. Zerlegung von Gruppenwirkungen in Orbits, Isomorphismus mit den Stabilisatornebenklassen. Hauptsatz der Überlagerungstheorie.	
Vorlesung 22 (Do 08 Jul 2021)	161
Bijektion zwischen Orbits und Wegekomponenten. Morphismen von transitiven g -Mengen. Alternativer Beweis des Isomorphismus $\Delta(p) \cong H \rtimes N_{\pi_1(X, x_0)} H$.	
Vorlesung 20 (Do 01 Jul 2021)	166
Satz von Seifert van Kampen. Wiederholung: Pushouts. Freie und amalgamisierte Produkte von Gruppen als Pushouts in Grp . Die Fundamentalgruppe F_2 von $S^1 \vee S^1$. Konstruktion von Räumen mit 'fast' freier Fundamentalgruppe.	
Vorlesung 21 (Di 06 Jul 2021)	168
Beispiele zu Seifert van Kampen.	
Vorlesung 22 (Do 08 Jul 2021)	172
Beginn des Beweises von Seifert van Kampen.	
Vorlesung 23 (Di 13 Jul 2021)	174
Beweis von Seifert-van-Kampen.	
Vorlesung 21 (Di 06 Jul 2021)	179
k -Zellen. CW-Komplexe. Realisierung von Sphären, Tori und $\mathbb{R}P^n$ als CW-Komplexe.	
Vorlesung 23 (Di 13 Jul 2021)	182
Berechnung der Fundamentalgruppe von Graphen	
Vorlesung 24 (Sa 18 Sep 2021)	184
Überlagerungen von CW-Komplexen. Untergruppen von freien Gruppen. Konstruktion von CW-Komplexen mit beliebiger Fundamentalgruppe. Borsuk-Ulam. Ausblick auf Topologie I und II: π_n , Homologie, Kohomologie.	

0 Motivation und Überblick

In der Topologie studieren wir topologische Räume. Diese verallgemeinern metrische Räume. Wir wollen zwei metrische Räume X, Y als 'gleich' ansehen, wenn es stetige, zueinander inverse Abbildungen $X \rightarrow Y, Y \rightarrow X$ gibt.

Beispiel 0.1. Betrachte ein Quadrat und einen Kreis, wir können sie durch Streckung aufeinander abbilden. Gleiches gilt für eine Tasse und einen Donut.



Abbildung 1: Beispiele 'gleicher' metrischer Räume (homöomorph)

Idee. Räume sind gewissermaßen aus 'Knete'.

Ziel. Wann sind zwei Räume gleich?

Dazu werden wir algebraische Invarianten verwenden.

Beispiel 0.2. \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m sind nicht 'gleich' für $n \neq m$.

Der Aufbau ist wie folgt:

1. Teil Grundlagen
2. Teil erste Invarianten: Fundamentalgruppe (dazu Überlagerungen)

Teil I

Mengentheoretische Topologie

1 Metrische Räume

Definition 1.1 (Metrik). Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (iii) (Dreiecksungleichung) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ein **Metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Metrik d auf X .

Definition 1.2 (Stetigkeit). Seien (X, d) und (X', d') zwei metrische Räume. Dann ist eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ **stetig in $x \in X$** , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' : d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Eine Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Abbildung 2: Definition von Stetigkeit in metrischen Räumen

Beispiel 1.3. • Sei V ein reeller Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann definiert

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

eine Metrik auf V . Insbesondere ist \mathbb{R}^n mit euklidischer Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

dadurch ein metrischer Raum.

- Ist (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum.
- Sei X eine Menge. Dann ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

eine Metrik auf X , genannt die **diskrete Metrik**.

Notation 1.4. Sei X ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

und nennen dies den **offenen ε -Ball um x**

Beobachte 1.5. Sei $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ eine Funktion, $x \in X$ sowie $\varepsilon, \delta > 0$. Dann sind äquivalent:

- 1) $\forall x' \in X$ mit $d_X(x', x) < \delta$ gilt $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$
- 2) Es ist $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$

Definition 1.6 (Umgebung). Sei X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ und $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x** , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Satz 1.7 (Urbilder von Umgebungen). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $x \in X$. Dann ist f stetig in x genau dann, wenn für alle Umgebungen V um $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Beweis. ' \implies ' Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Da f stetig ist, $\exists \delta > 0$, sodass $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Also ist $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x .
 ' \longleftarrow '. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U(f(x), \varepsilon)$ eine Umgebung von $f(x)$. Also ist $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ eine Umgebung von x , also $\exists \delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$. Also wie gewünscht $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$. \square

Definition 1.8 (Offene Mengen). Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **offen**, falls sie Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Bemerkung 1.9. $U(x, \varepsilon)$ ist offen.

Beweis. Für alle $y \in U(x, \varepsilon)$ ist

$$U(y, \underbrace{\varepsilon - d(x, y)}_{>0}) \subseteq U(x, \varepsilon).$$

nach der Dreiecksungleichung. □

Satz 1.10 (Urbilder offener Mengen sind offen). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn $\forall U \subseteq Y$ offen auch das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Beweis. ' \implies '. Sei $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $x \in f^{-1}(U)$ beliebig. Dann ist $f(x) \in U$ und somit ist U eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x nach **Theorem 1.7**. Also ist $f^{-1}(U)$ offen, da x beliebig war.
 ' \impliedby '. Sei $x \in X$, V eine Umgebung von $f(x)$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Nach Annahme ist $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ offen. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x .
 Damit ist f stetig nach **Theorem 1.7** □

Satz 1.11 (Offene Mengen in metrischen Räumen). Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1) Die leere Menge \emptyset und X sind offen
- 2) $\forall U_1, \dots, U_n \subseteq X$ offen ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.
- 3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Warnung. Eigenschaft 2) gilt nicht für unendliche Schnitte. Es ist $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$ offen für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, allerdings ist dann

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

nicht offen.

Beweis von Theorem 1.11. 1) klar

- 2) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. $\forall i = 1, \dots, n$ gibt es nun ε_i mit $U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Dann ist

$$U(x, \varepsilon) \subseteq U(x, \varepsilon_i) \subseteq U_i.$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und somit wie gewünscht $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$

- 3) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ beliebig. Dann $\exists i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, $\exists \varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U_i$. Also ist $U(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ und somit ist die Vereinigung offen. □

2 Topologische Räume

Definition 2.1 (Topologie). Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X , so dass gilt:

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- 2) Für $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
- 3) Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in \mathcal{O} heißen **offene Mengen**.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{O}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{O} auf X .

Definition 2.2 (Stetigkeit). Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, falls für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Beispiel 2.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist

$$(X, \mathcal{O}) := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen bezüglich } d\}.$$

ein topologischer Raum. \mathcal{O} ist die von der Metrik d **induzierte Topologie**.

Definition 2.4 (Metrisierbarkeit). Ein topologischer Raum heißt **metrisierbar**, falls die Topologie von einer Metrik induziert ist.

Beispiel 2.5. Sei X eine Menge. Die **diskrete Topologie** auf X ist die Menge aller Teilmengen, d.h. $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$. Diese ist von der diskreten Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

induziert.

Beweis. Ist $x \in X$, dann ist

$$\{x\} = U \left(x, \frac{1}{2} \right).$$

offen. Ist $U \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Satz 2.6. Sei X ein endlicher (endlich als Menge), metrisierbarer topologischer Raum. Dann ist X diskret (d.h. X trägt die diskrete Topologie).

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\{x\}$ offen ist $\forall x \in X$. Sei d eine Metrik, die die Topologie induziert, dann wähle

$$\varepsilon := \min \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} > 0.$$

Beachte, dass dies existiert, da $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$ und die Menge nach Voraussetzung endlich ist. Nun ist:

$$\{x\} = U(x, \varepsilon).$$

offen und wir sind fertig. □

Beispiel 2.7. 1) Wähle $X = \{a, b\}$ und setze

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Dies ist ein topologischer Raum (leicht prüfen), er ist jedoch nicht metrisierbar, da endlich und nicht diskret. Dieser Raum heißt **Sierpinski-Raum**.

2) Sei X eine Menge. Die **indiskrete Topologie** auf X enthält nur \emptyset, X . Man prüft leicht, dass dies eine Topologie ist.

- Hat X mindestens 2 Elemente, so ist X nicht metrisierbar.

Beweis. Nimm $|X| > 2$ an und wähle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Sei d eine Metrik, die die Topologie auf X induziert und setze $\varepsilon := d(x, y)$. Dann ist

$$x \in U(x, \varepsilon) \quad y \notin U(x, \varepsilon).$$

also ist $U(x, \varepsilon) \neq \emptyset, X$, Widerspruch. □

- Sei Y ein topologischer Raum. Dann ist $f : Y \rightarrow X$ stetig für beliebige Abbildungen f .

Beweis. Es sind $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sowie $f^{-1}(X) = Y$ beide offen. □

Bemerkung 2.8. Ist Y diskret und X beliebig, so ist jede Abbildung $f : Y \rightarrow X$ stetig.

Vorlesung 2
Do 15 Apr 2021

Definition 2.9 (Äquivalente Metriken). Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen **äquivalent**, falls Konstanten c_1, c_2 existieren, sodass

$$\forall x, y \in X: \quad c_1 \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 \cdot d_1(x, y).$$

Satz 2.10. Äquivalenz (von Metriken) ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Reflexivität: Klar mit $c_1 = c_2 = 1$

Symmetrie: Seien c_1, c_2 wie in der Definition. Dann gilt mit entsprechender Division, dass

$$\forall x, y \in X: \quad \frac{1}{c_2} \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \frac{1}{c_1} d_2(x, y).$$

Transitivität: . Seien c_1, c_2, c'_1, c'_2 gewählt, sodass $\forall x \forall y: c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$ sowie $c'_1 d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq c'_2 d_2(x, y)$ (Also $d_1 \sim d_2$ und $d_2 \sim d_3$). Dann ist auch

$$\forall x \forall y: \quad c_1 c'_1 d_1(x, y) \leq c'_1 d_2(x, y) \leq d_3(x, y) \leq c'_2 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y).$$

□

Satz 2.11. Äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie.

Beweis. Wegen der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass Mengen, die offen bezüglich d_2 sind, auch offen bezüglich d_1 sind.

Sei nun $U \subseteq X$ offen bezüglich d_2 und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U$. Ist nun $d_1(x, y) < \frac{\varepsilon}{c_2}$, dann ist

$$d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) < \varepsilon.$$

und damit ist

$$U_{d_1}\left(x, \frac{\varepsilon}{c_2}\right) \subseteq U_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

und somit ist U auch offen bezüglich d_1 .

□

Bemerkung 2.12. Es gibt auch nicht-äquivalente Metriken, die die gleiche Topologie induzieren. Siehe hierzu [Aufgabe 1.2](#).

Bemerkung 2.13. Je zwei Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent, induzieren also dieselbe Topologie, das beweisen wir jedoch hier nicht.

Definition 2.14 (Umgebung). Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ sowie $x \in X$. Dann heißt U **Umgebung von x** , falls es eine offene Teilmenge $O \subseteq U$ gibt, mit $x \in O \subseteq U$.

Bemerkung 2.15. Für metrische Räume stimmt dies mit der vorherigen Definition überein.

Satz 2.16. Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

- 1) U ist offen.
- 2) U ist Umgebung aller ihrer Punkte.

Beweis. '1) \implies 2)' ist klar, wähle einfach $O = U$.
'2) \implies 1)'. Für jedes $x \in U$ existiert also U_x mit $x \in U_x \subseteq U$. Dann ist aber

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x.$$

offen als Vereinigung offener Mengen. □

Definition 2.17 (Abgeschlossene Mengen). Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ offen ist.

Bemerkung 2.18. Für metrische Räume stimmt das mit dem Begriff aus der Analysis überein.

Satz 2.19 (Dualität). Ein topologischer Raum lässt sich auch über seine abgeschlossenen Mengen charakterisieren. Diese müssen erfüllen:

- i) \emptyset, X sind abgeschlossen
- ii) Für A_1, \dots, A_n abgeschlossen ist auch $A_1 \cup \dots \cup A_n$ abgeschlossen.
- iii) Für eine Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

abgeschlossen.

Wenn wir von einer Familie von Mengen $\{A_i\}_{i \in I}$ sprechen, meinen wir, dass I eine Menge ist, und für jedes $i \in I$ ist A_i eine Teilmenge von X . Formal können wir dies als eine Funktion $I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ darstellen.

Beweis von Theorem 2.19. i) $X \setminus \emptyset = X, X \setminus X = \emptyset$ sind abgeschlossen.

ii)

$$\underbrace{\bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)}_{\text{offen}} = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ abgeschlossen.}$$

iii)

$$\underbrace{\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)}_{\text{offen}} = X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \implies \bigcap_{i \in I} A_i \text{ abgeschlossen.}$$

□

Satz 2.20 (Stetigkeit mit abgeschlossenen Mengen). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion zwischen topologischen Räumen. Dann sind äquivalent:

- 1) f ist stetig
- 2) $\forall U \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen
- 3) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

Beweis.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\iff \forall U \subseteq Y \text{ offen ist } f^{-1}(U) \text{ offen} \\ &\iff \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(Y \setminus A) \text{ offen} \\ &\iff \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } X \setminus f^{-1}(A) \text{ offen} \\ &\iff \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen ist } f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so auch $(Y, d_{Y \times Y}) \quad \forall Y \subseteq X$. Wie ist dies für topologische Räume?

Warnung. $(Y, \mathcal{O}_X \cap \mathcal{P}(Y))$ ist im allgemeinen **kein** topologischer Raum. (wenn Y nicht offen ist, denn dann ist $Y \notin \mathcal{S}_X \cap \mathcal{P}(X)$)

Satz und Definition 2.21 (Teilraumtopologie). Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist

$$\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y \mid U \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf Y , die **Teilraumtopologie** oder auch **Unterraumtopologie** genannt wird.

Beispiel 2.22. Betrachte $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ als Unterraum. Schneiden wir eine offene Menge in \mathbb{R}^2 mit \mathbb{R}^1 , so erhalten wir ein offenes Intervall:

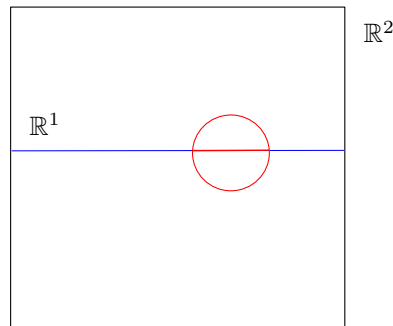


Abbildung 3: \mathbb{R}^1 als Unterraum von \mathbb{R}^2

Beweis. • Es sind $\emptyset = \emptyset \cap Y$ und $Y = X \cap Y$ offen.

• Es ist

$$\bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \cap Y.$$

• Es ist

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y.$$

□

Warnung. Für $Z \subseteq Y \subseteq X$ muss man zwischen 'offen in Y ' und 'offen in X ' unterscheiden, falls Y nicht offen ist.

Bemerkung* 2.23. Ist $Y \subseteq X$ offen, so stimmen die beiden vorherigen Konzepte tatsächlich überein, d.h. eine Menge $Z \subseteq Y$ ist offen in Y , genau dann, wenn sie offen in X ist.

Bemerkung 2.24. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Unterraumtopologie auf Y bzgl. der Topologie auf X ist gleich der Topologie induziert von der eingeschränkten Metrik.

Beweis. Für $y \in Y$ ist

$$U_{d|_{Y \times Y}}(y, \varepsilon) = U_d(y, \varepsilon) \cap Y.$$

Deswegen werden von beiden Metriken die gleichen offenen Mengen induziert. □

Beispiel 2.25. Der **Einheitskreis** als Unterraum von \mathbb{R}^2 :

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} =: S^1 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Genauso gibt es die **n -Sphäre** definiert durch

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} =: S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Definition 2.26 (Homöomorphie). Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, falls f stetig und bijektiv ist und auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.

Existiert solch ein f , so heißen X, Y **homöomorph**

Beispiel 2.27. Die Räume $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind homöomorph mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x + iy \end{aligned}$$

Warnung. Nicht jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.

Beispiel 2.28. Betrachte für eine Menge X die Identitätsabbildung $(X, \mathcal{P}(X)) \xrightarrow{\text{id}_X} (X, \{\emptyset, X\})$ von der diskreten in die indiskrete Topologie. Diese ist stetig, aber die Umkehrabbildung nicht (falls $|X| \geq 2$).

3 Quotientenräume

Definition 3.1 (Äquivalenzklasse). Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Für $x \in X$ definieren wir die **Äquivalenzklasse** $[x]$ von x durch:

$$[x] := \{x' \in X \mid x \sim x'\}.$$

Wir setzen

$$X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

als die **Menge der Äquivalenzklassen** von X bezüglich \sim . Definiere nun

$$q : \begin{cases} X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{cases}$$

als die **kanonische Projektion** von X auf seine Äquivalenzklassen.

Fakt 3.2. Wir stellen fest, dass q surjektiv ist.

Für eine Surjektion $f : X \rightarrow Y$ ist $x \sim y : \iff f(x) = f(y)$ eine Äquivalenzrelation auf X und

$$\begin{aligned} X/\sim &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, wir erhalten also eine Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und surjektiven Abbildungen aus X .

Satz und Definition 3.3 (Quotiententopologie). Sei X ein topologischer Raum und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Sei $q : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion. Dann definiert

$$\mathcal{O}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen}\}.$$

eine Topologie auf X/\sim , genannt die **Quotiententopologie**.

Beweis. Wir prüfen die Axiome einer Topologie:

- Es ist $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $q^{-1}(X/\sim) = X$, also sind beide Mengen offen.
- Sind $U_1, \dots, U_n \subseteq X/\sim$ offen, so ist

$$q^{-1}(U_1 \cap \dots \cap U_n) = q^{-1}(U_1) \cap \dots \cap q^{-1}(U_n).$$

offen in X , also ist $U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen in X/\sim nach Definition.

- Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X/\sim , dann ist

$$q^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(U_i).$$

offen in X , also ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen in X/\sim nach Definition.

□

Bemerkung 3.4. Die Projektion $q : X \rightarrow X/\sim$ ist stetig und die Quotiententopologie ist maximal (bezüglich Inklusion, lies: 'am feinsten') unter allen Topologien auf X/\sim , für die q stetig ist.

Satz 3.5 (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $q : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion. Angenommen, es existiert $g : X/\sim \rightarrow Y$ mit $f = g \circ q$. Dann ist g stetig und in diesem Fall ist g eindeutig.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Bemerkung 3.6. g existiert genau dann, wenn $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$

Trivial Nonsense* 3.7. Das ist eine universelle Eigenschaft im Sinne der Kategorientheorie, d.h. für einen Raum X und eine Äquivalenzrelation existiert bis auf eindeutigen Isomorphismus stets genau ein topologischer Raum $(X/\sim, \mathcal{S})$ zusammen mit einer stetigen Abbildung $q : X \rightarrow X/\sim$, sodass $x \sim x' \implies q(x) = q(x')$, sodass das Tripel $(X, X/\sim, q)$ obige Eigenschaft hat. Wir können also obige Eigenschaft auch als Definition der Quotiententopologie verwenden, und aus dieser folgt auch die Eindeutigkeit. Existenz haben wir mit unserer vorherigen Definition gezeigt.

Beweis von Aufgabe 3.2. Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist

$$q^{-1}(g^{-1}(U)) \stackrel{f=g \circ q}{=} f^{-1}(U).$$

offen, weil f stetig ist. Also ist $g^{-1}(U)$ offen per Definition ($g^{-1}(U)$ ist nach Definition genau dann offen in X/\sim , wenn $q^{-1}(g^{-1}(U))$ offen in X ist) und somit ist g stetig. \square

Beispiel 3.8. Sei $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das **Einheitsintervall** (mit der Unterraumtopologie bezüglich \mathbb{R}) mit der Äquivalenzrelation erzeugt von $0 \sim 1$. Wir 'identifizieren' also die Punkte $\{0\}, \{1\}$ miteinander.

Satz 3.9 (Kreishomöomorphie). Der Quotientenraum $[0, 1]/(0 \sim 1)$ ist homöomorph zu S^1 .

Vorlesung 3
Di 20 Apr 2021

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f' : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{2\pi it} \end{cases}$$

Wir sehen $f'(0) = f'(1) = 1$, also existiert nach der universellen Eigenschaft ein f , sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f'} & S^1 \\ \downarrow & \nearrow f & \\ [0, 1]/(0 \sim 1) & & \end{array} \quad \text{und } f \text{ stetig ist. Zudem ist } f \text{ bijektiv. Es bleibt zu zeigen,}$$

dass f^{-1} stetig ist, das zeigen wir jedoch nicht jetzt (ginge mit viel rechnen), sondern später, wenn wir mehr Technik haben. Anschaulich ist das jedoch klar: \square

Bemerkung 3.10. Die Abbildung

$$\begin{cases} [0, 1) & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & e^{2\pi it} \end{cases}$$

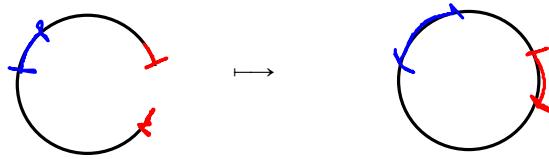


Abbildung 4: $[0, 1]/(0 \sim 1)$ und S^1 sind homöomorph

ist stetig und bijektiv, allerdings kein Homöomorphismus, denn $[0, \frac{1}{2}] \subseteq [0, 1)$ ist offen, aber $f([0, \frac{1}{2}]) = (f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ ist nicht offen im Kreis.

Beispiel 3.11. 1) Sei $X = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Identifiziere nun $(t, 0) \sim (t, 1)$ sowie $(0, s) \sim (1, s)$ für $s, t \in [0, 1]$. Dann ist X/\sim der Torus.

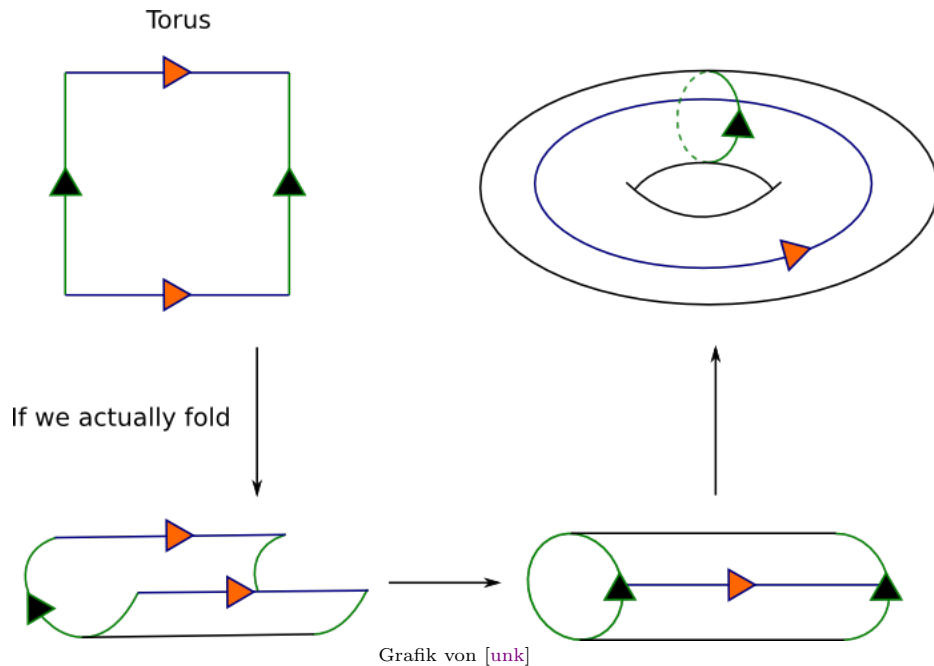
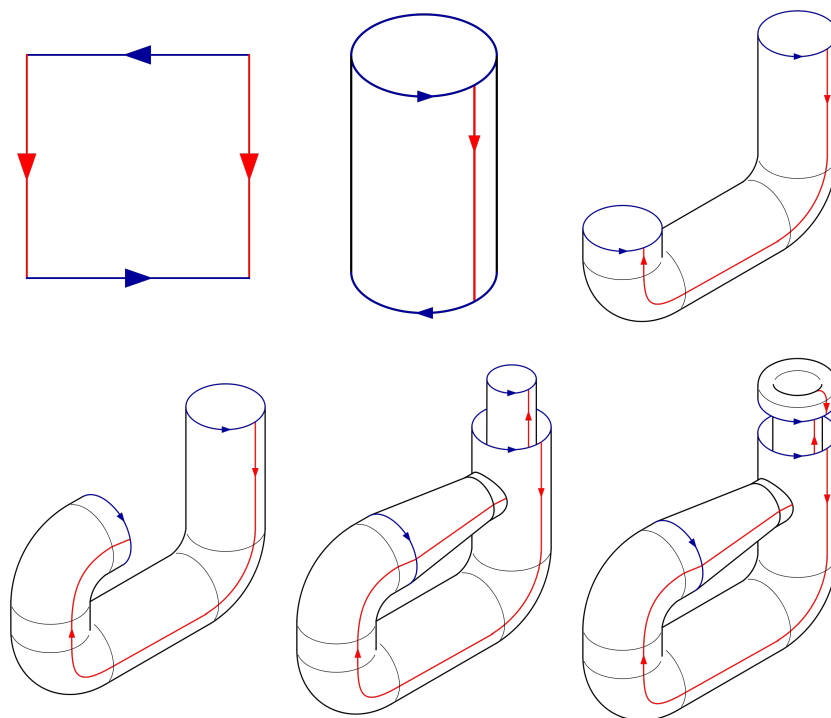


Abbildung 5: Entstehung des Torus als Quotientenraum von $[0, 1]^2$

2) Sei $X = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Identifizieren wir $(t, 0) \sim (t, 1)$ sowie $(0, s) \sim (1, 1 - s)$, so erhalten wir die **Kleinsche Flasche**.



Grafik von [Ind]

Abbildung 6: Entstehung der Kleinschen Flasche als Quotientenraum von $[0, 1]^2$.

- 3) Betrachte auf dem $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Relation $x \sim \lambda x$ für $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}^{n+1} / \sim \cong S^n$. Zunächst ist nämlich die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow S^n \\ x & \longmapsto \frac{x}{\|x\|_2} \end{cases}$$

stetig und die induzierte Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \rightarrow S^n$ ist bijektiv. Das rechnen wir nach: Seien $x \neq y$ mit $d(x, y) < \delta$, so ist:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) &\leq d\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|x\|}\right) + d\left(\frac{y}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x, y) + \sqrt{\sum \left(\frac{y_i}{\|x\|} - \frac{y_i}{\|y\|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|} d(x, y) + \sqrt{\frac{(\|x\| - \|y\|)^2}{\|x\| \|y\|}} \|y\| \\ &< \frac{1}{\|x\|} \cdot \delta + \frac{\delta}{\|x\|^2 + \delta \|x\|} (\|x\| + \delta) \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{1}$$

also ist f stetig. Mit der Inklusion $\iota : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$f \circ \iota = \text{id}_{S^n}.$$

Übung: Daraus folgt bereits, dass S^n die Quotiententopologie trägt.

- 4) Setzen wir erneut $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, aber diesmal $x \sim \lambda x$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so heißt der Quotient

$$X / \sim =: \mathbb{R}P^n.$$

der **reelle projektive Raum**. Es ist

$$\mathbb{R}P^n \cong S^n / (x \sim -x).$$

Dies sehen wir mittels folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{\iota} \end{array} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{f}} \\ \xleftarrow{\bar{\iota}} \end{array} & S^n / (x \sim -x) \end{array} \quad (2)$$

Die Abbildungen $\bar{\iota}$ und \bar{f} sind stetig nach der universellen Eigenschaft und invers zueinander.

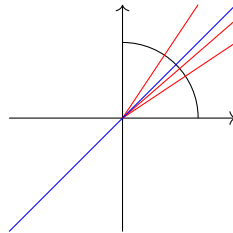


Abbildung 7: Konstruktion des reellen projektiven Raums für den Fall $n = 1$. Wir identifizieren die roten Strahlen miteinander, nicht jedoch den gesamten blauen, da $\lambda > 0$.

- 5) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Definiere die Relation \sim durch $a \sim a'$ für $a, a' \in A$ (bzw. erzeuge eine dadurch). Dann setzen wir

$$X/A := X / \sim .$$

Damit ergibt sich

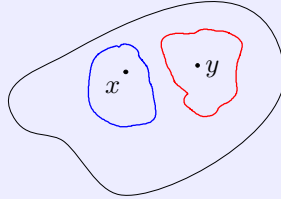
- 6) $[0, 1] / [0, 1) \cong S$ ist der Sierpinski-Raum, vergleiche auch [Beispiel 2.7](#).

Beweis. $[0, 1] / [0, 1)$ hat zwei Punkte $[0, 1)$ und $\{1\}$. Es ist $[0, 1) \subseteq [0, 1]$ offen, aber $\{1\}$ nicht, also handelt es sich um den Sierpinski-Raum. \square

Bemerkung 3.12. Quotientenräume von metrischen Räumen sind im Allgemeinen nicht metrisierbar, [Beispiel 3.11 Punkt 6\)](#) liefert hier ein gewünschtes Gegenbeispiel.

4 Trennungssaxiome

Definition 4.1 (Hausdorff'sch). Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** (oder **Hausdorffsch**), wenn $\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ existieren mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungssaxiom T_2 .



Satz 4.2. Ist X metrisierbar, so ist X Hausdorffsch.

Beweis. Sei d eine Metrik auf X , die die Topologie induziert. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Setze

$$U_x := U\left(x, \frac{d(x, y)}{2}\right) \quad U_y = U\left(y, \frac{d(x, y)}{2}\right).$$

Dann ist $U_x \cap U_y = \emptyset$, denn für alle $z \in U_x \cap U_y$ ist

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{d(x, y)}{2} + \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y),$$

was nicht sein kann. □

Beispiel 4.3. \mathbb{R}^n ist Hausdorffsch.

Satz 4.4. Ist X Hausdorffsch und $x \in X$, dann ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen.

Beweis. Für $y \neq x$ existiert U_y offen mit $x \notin U_y$ und $y \in U_y$. Dann ist

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$$

offen. □

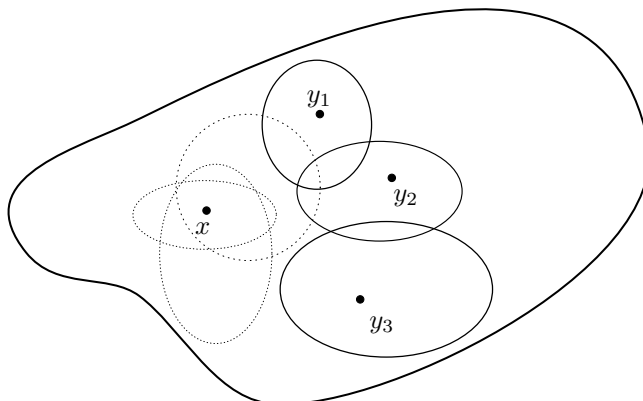


Abbildung 8: Skizze zum Beweis von **Theorem 4.4**

Bemerkung 4.5. Ein topologischer Raum, für den alle $\{x\}$ abgeschlossen sind, heißt **T_1 -Raum**.

Bemerkung* 4.6. Man findet in der Literatur auch folgende Definition:
 Ein topologischer Raum heißt T_1 -Raum, wenn es für je zwei verschieden Punkte $x \neq y$ Umgebungen U_x, U_y gibt mit $x \in U_x, y \in U_y$ und $x \notin U_y, y \notin U_x$.
 Im Gegensatz zum Hausdorff-Raum trennen wir zwei Punkte also durch 2 nicht notwendigerweies disjunkte Umgebungen / offene Mengen. Mit dem gleichen Beweis wie in **Theorem 4.4** zeigen wir dann, dass jeder Punkt abgeschlossen ist. Ist umgekehrt X ein Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, so können wir x, y stets durch die offenen Umgebungen $y \in X \setminus \{x\}$ sowie $x \in X \setminus \{y\}$ trennen. Die beiden Definitionen sind also äquivalent.

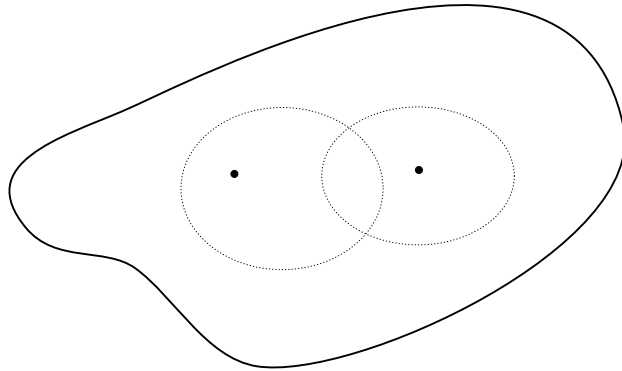


Abbildung 9: Ein T_1 -Raum

Lemma 4.7. Sei X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist auch A Hausdorffsch.

Beweis. Sei $x \neq y \in A$. Dann existieren $U_x, U_y \subseteq X$ offen mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$ sowie $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dann sind

$$U_x \cap A \quad \text{und} \quad U_y \cap A \subseteq A$$

offen in A und erfüllen die Bedingungen. \square

Bemerkung 4.8. Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch. Ist X endlich und Hausdorffsch, so ist X diskret.

Beweis. Für jedes $y \neq x$ existiert ein U_x^y offen mit $x \in U_x^y$ und $y \notin U_x^y$. Dann ist aber

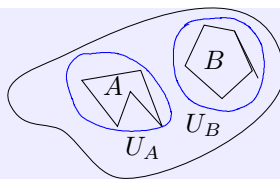
$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_x^y$$

offen (da X endlich), also ist X diskret. Die Umkehrung ist offensichtlich. \square

Beispiel 4.9. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist Hausdorffsch.

Definition 4.10 (Normal). Ein topologischer Raum heißt **normal**, falls

- X ist Hausdorffsch
- $\forall A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ existieren $U_A, U_B \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$ und $U_A \cap U_B = \emptyset$. Diese Eigenschaft heißt auch Trennungssaxiom T_4 .



Bemerkung 4.11. Manchmal gibt es diese Definition in der Literatur auch ohne Hausdorff'sch.

Satz 4.12. Ist X metrisierbar, dann ist X normal.

Der Beweis war als **Aufgabe 2.3** auf den Übungszetteln:

*Beweis**. Der folgende Beweis wurde in unserem Tutorium mit HEIKO BRAUN besprochen:

Wir wissen bereits mit **Theorem 4.2**, dass X Hausdorffsch ist. Von **1.1** wissen wir, dass:

$$d_x : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto d(x, y) \end{cases}$$

eine stetige Abbildung ist. Dann ist für eine Teilmenge $A \subseteq X$ auch

$$d_A : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \inf \{d_x(y) \mid x \in A\} \end{cases}$$

eine stetige Funktion, die den Abstand zur Menge A ausdrückt.

Behauptung 1. Ist A abgeschlossen, so ist $d_A(y) = 0 \iff y \in A$.

Unterbeweis. Die Richtung ' \Leftarrow ' ist trivial, da dann $d_y(y) = 0$ Teil des Infimums ist. Die andere Richtung beweisen wir durch Kontraposition, d.h. sei $y \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, dann ist aber sicherlich $d_x(y) \geq \varepsilon$ für alle $x \in A$, und somit ist auch das Infimum über diese $\geq \varepsilon$. ■

Seien nun $A, B \subseteq X$ abgeschlossene, disjunkte Teilmengen. Definiere

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \end{cases}$$

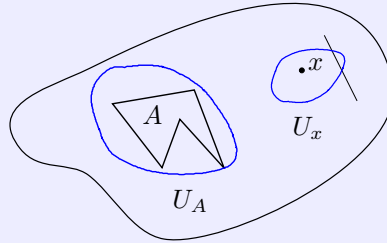
Der Nenner wird nie Null, da dazu $d_A(x) = 0 = d_B(x)$ gelten müsste, nach der Behauptung also $x \in A, B$ und dies trifft nicht zu wegen $A \cap B = \emptyset$ nach Annahme. Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist nun f stetig. Zudem stellen wir fest, dass $f(A) \equiv 0$ sowie $f(B) \equiv 1$. Dann sind

$$U := f^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{2} \right) \right) \quad V := f^{-1} \left(\left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right).$$

zwei offene Umgebungen, die A, B enthalten und disjunkt sind, wie man leicht prüft. Also ist X normal. \square

Bemerkung* 4.13. Wir haben eine scheinbar stärkere Eigenschaft gezeigt als die, dass X normal ist, nämlich, dass wir zwei abgeschlossene Mengen durch eine Funktion trennen können. Es stellt sich jedoch heraus, dass ein topologischer Raum genau dann diese Eigenschaft besitzt, wenn er normal ist, wobei 'normal' nicht fordert, dass der Raum Hausdorff ist. Dies nennt sich *Lemma von Urysohn*, und wir werden dieses auch später noch in der Vorlesung kennenlernen, für jetzt ist dies jedoch unwichtig. Die Trennung zweier abgeschlossener Mengen mittels einer Funktion ähnelt jedoch sehr stark der folgenden Definition (und das ist kein Zufall):

Definition 4.14 (Regulär). Ein topologischer Raum X heißt **regulär**, falls X Hausdorff ist und $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$ existieren U_A, U_x offen mit $A \subseteq U_A, x \in U_x$ und $U_A \cap U_x = \emptyset$. (Auch Trennungsaxiom T_3 genannt).



Bemerkung 4.15. Klarerweise gilt $T_4 \implies T_3$, d.h. jeder normale Raum ist auch regulär. Hierzu benötigen wir nur, dass Punkte in T_4 -Räumen abgeschlossen sind, aber das folgt mit **Theorem 4.4**, bzw. damit, dass wir bereits $T_4 \implies T_2 \implies T_1$ wissen.

5 Kompaktheit

Aus der Analysis ist (vielleicht) folgender Satz bekannt.

Satz 5.1 (Heine-Borel). Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- 1) X ist abgeschlossen und beschränkt.
- 2) Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung

'Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung' bedeutet:
 Für jede Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq X$ offen und $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ existiert eine
 endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$

Beweis. später. □

Definition 5.2 (Kompaktheit). Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung 5.3. Manchmal heißt obige Definition auch quasi-kompakt, und kompakt bedeutet dann quasi-kompakt + Hausdorff.

Beispiel 5.4. Die Räume

$$[0, 1] \subseteq \mathbb{R} \quad S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

sind beide kompakt (nach 5.1)

Vorlesung 4
Do 22 Apr 2021

Beispiel 5.5 (mündlich vor der Vorlesung). Zur Frage von letzter Woche (wenn wir einen Hausdorff-Raum haben und eine Äquivalenzrelation, deren Klassen abgeschlossen sind, ist dann der Quotient wieder Hausdorff?): Wähle auf $[0, 1]$ die Relation erzeugt von

$$\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Betrachte dann die Abbildung:

$$[0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1] / \sim .$$

Punkturbilder sind endlich, also abgeschlossen. Aber der Raum $[0, 1] / \sim$ ist nicht hausdorffsch, denn wir können die Punkte 0, 1 nicht trennen.

Satz 5.6. Sei X ein kompakter Raum und $Y \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Dann existieren $U'_i \subseteq X$ offen mit $U_i = U'_i \cap Y$. Die Familie

$$\{U'_i\}_{i \in I} \cup \left\{ \underbrace{X \setminus Y}_{\text{offen}} \right\}.$$

ist nun eine offene Überdeckung von X . Dann existiert $J \subseteq I$ endlich, so dass

$$\{U'_j\}_{j \in J} \cup \{X \setminus Y\}.$$

die Menge X überdeckt. Also ist

$$\left\{ \underbrace{U'_j \cap Y}_{U_j} \right\}_{j \in J} \cup \left\{ \underbrace{X \setminus Y \cap Y}_{=\emptyset} \right\}$$

eine endliche Überdeckung für Y . □

Satz 5.7. Sei X ein Hausdorff-Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann ist Y abgeschlossen.

Korollar 5.8. Ist X kompakt und Hausdorffsch, dann sind äquivalent:

- 1) $Y \subseteq X$ ist abgeschlossen
- 2) Y ist kompakt.

Beweis. Unmittelbare Konsequenz aus **Theorem 5.6** und **Theorem 5.7**. □

Lemma 5.9. Sei X ein Hausdorff Raum und $Y \subseteq X$ kompakt. Dann existiert $\forall x \in X \setminus Y$ offene Teilmengen $U_{x,Y}$ und $V_{x,Y}$ von X so dass: $x \in U_{x,Y}$ und $Y \subseteq V_{x,Y}$ und $U_{x,Y} \cap V_{x,Y} = \emptyset$.

Beweis. Sei $x \in X \setminus Y$. $\forall y \in Y$ existieren $U_{x,y}$ und $V_{x,y}$ offen mit $x \in U_{x,y}$ und $y \in V_{x,y}$, weil X Hausdorffsch.

Dann ist $\{V_{x,y} \cap Y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y . Also existiert endliche Teilüberdeckung (da Y kompakt) induziert durch Punkte y_1, \dots, y_n . Also:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i}.$$

Sei

$$V_{x,Y} := \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i} \quad U_{x,Y} := \bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}.$$

Es ist auch $x \in U_{x,Y}$, weil $x \in U_{x,y_i}$ für jedes i . Wir müssen also noch Disjunktheit prüfen, es ist:

$$U_{x,Y} \cap V_{x,Y} \subseteq U_{x,y_i} \cap V_{x,y_i} = \emptyset.$$

Also auch

$$\emptyset = U_{x,Y} \cap \bigcup_{i=1}^n V_{x,y_i} = U_{x,Y} \cap V_{x,Y}.$$

□

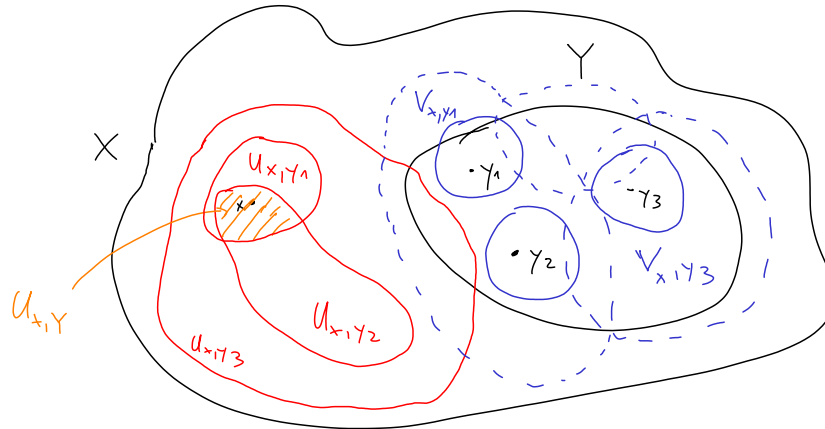


Abbildung 10: Skizze zum Beweis von Lemma 5.9

Beweis von Theorem 5.7. Nach Lemma 5.9 existieren $\forall x \in X \setminus Y$ ein $U_{x, Y}$ mit $x \in U_{x, Y}$ und $U_{x, Y} \cap Y = \emptyset$. Also ist

$$X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_{x, Y}.$$

offen und somit ist Y abgeschlossen. \square

Beispiel 5.10 ('Gegenbeispiel' zu Satz 5.7). Sei G die **Gerade mit zwei Ursprüngen**: Betrachte $G := \mathbb{R} \cup \{0'\}$ als Menge, und charakterisiere die Umgebungen folgendermaßen:

- Für einen Punkt $a \in \mathbb{R}$, d.h. $a \neq 0'$ ist U eine Umgebung von a genau dann, wenn $\exists \varepsilon > 0$, sodass $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$. (das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ist hier als Teilmenge von \mathbb{R} zu verstehen)
- Für den Punkt $0' \notin \mathbb{R}$ ist U eine Umgebung von a genau dann, wenn $\exists \varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \subseteq U$.

Da offene Mengen genau diejenigen Mengen sind, die Umgebung all ihrer Punkte sind, haben wir damit die offenen Mengen von G charakterisiert.

Wir können uns G vorstellen als \mathbb{R} , in dem der Ursprung durch zwei gleichberechtigte Ursprünge ersetzt worden ist, die beide (bis auf sich selbst) die gleichen

Umgebungen besitzen, die aber nicht zwingend gegenseitig in ihren Umgebungen liegen, d.h. nicht 'nah' beieinander sind.

Dann ist $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq G$ kompakt (Aufgabe 2.3), wir behaupten, dass $[-1, 1]$ jedoch nicht abgeschlossen ist in G . Sonst wäre in der Tat $G \setminus [-1, 1]$ offen, und es ist $0' \in G \setminus [-1, 1]$, aber es handelt sich nicht um eine Umgebung von $0'$, weil für kein ε die Intervalle $(-\varepsilon, 0)$ und $(0, \varepsilon)$ in $G \setminus [-1, 1]$ liegen.

Bemerkung 5.11. Das Beispiel zeigt also, dass wir die Hausdorff-Bedingung in Theorem 5.7 nicht fallen lassen können, d.h. es gibt nicht abgeschlossene, kompakte Mengen.

Bemerkung* 5.12 (Mehr zur Gerade mit 2 Ursprüngen). Wir geben zwei weitere (äquivalente) Definitionen der Gerade mit 2 Ursprüngen, um so hoffentlich eine bessere Vorstellung zu ermöglichen:

i) Setze $G := \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{a, b\}$ als Mengen. Als Basis wählen wir

- Alle offenen Bälle aus \mathbb{R} , die nicht die 0 enthalten.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $(-\varepsilon, 0) \cup \{a\} \cup (0, \varepsilon)$
- Für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $(-\varepsilon, 0) \cup \{b\} \cup (0, \varepsilon)$

In diesem Fall können wir Homöomorphismen zu obiger Definition bauen, indem wir $0 \mapsto a$ und $0' \mapsto b$ wählen, und alle andere Punkte kanonisch 'auf sich selbst' schicken.

ii) Wir können G auch als Quotientenraum einer Teilmenge von \mathbb{R} auffassen. Betrachte hierzu $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Produkttopologie bzw. mit der Teilraumtopologie von \mathbb{R}^2 (diese beiden sind äquivalent, wie man sich leicht überlegt). Es handelt sich also um zwei parallele, voneinander getrennte Geraden. Nun identifizieren wir korrespondierende Punkte beider Geraden miteinander, allerdings nicht deren Ursprüngen. Wir erzeugen also die Äquivalenzrelation \sim generiert durch $(x, 0) \sim (x, 1)$ für $x \neq 0$ und bilden bezüglich dieser Relation den Quotientenraum. Was wir erhalten, ist genau G . Indem wir mit G definiert wie in der Vorlesung die Abbildung von $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ nach G definieren durch

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (a, b) = (0, 0) \\ 0' & \text{falls } (a, b) = (0, 1) \end{cases}.$$

sehen wir schnell, dass diese über den Quotientenraum $\mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim$ faktorisiert (universelle Eigenschaft!) und die entstehende Abbildung bijektiv und stetig ist. Dass es sich um einen Homöomorphismus handelt, sei hier nicht nachgerechnet sondern nur angemerkt.

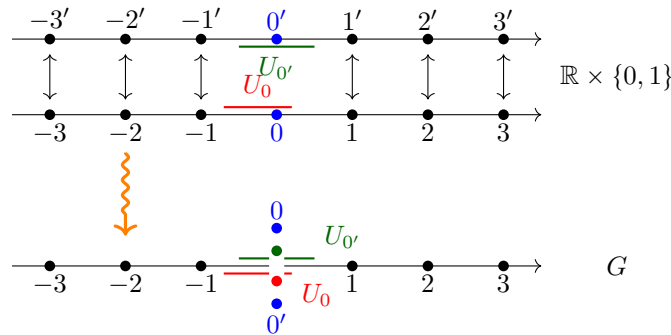


Abbildung 11: Gerade mit 2 Ursprüngen als Quotientenraum von $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Nun sind wir gewappnet für den

Beweis von Theorem 5.1 (Heine-Borel). '2) \implies 1)'. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist sie abgeschlossen nach 5.7. Zudem ist $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U(x, 1)$ eine offene Überdeckung. Da X kompakt finden wir endlich viele $x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^n U(x_i, 1).$$

Also ist

$$\text{diam}(X) \leq \max \{d(x_i, x_j)\} + 2 < \infty.$$

und somit ist X auch beschränkt.

'1) \implies 2)'. Da X beschränkt ist, $\exists m > 0$ mit $X \subseteq [-m, m]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Da X abgeschlossen ist, genügt es nach Theorem 5.6 zu zeigen, dass $[-m, m]^n$ kompakt ist.

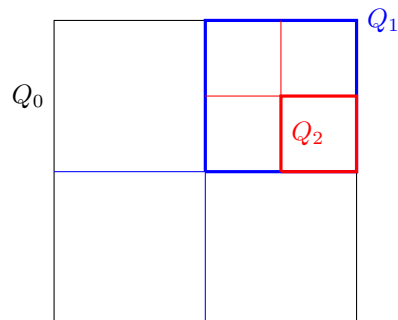
Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nimm also an, dass $[-m, m]^n$ nicht kompakt ist. Dann existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ ohne endliche Teilüberdeckung.

Unterteile $[-m, m]^n$ in 2^n gleich große Unterwürfel (halbiere jede Seite). Mindestens ein Unterwürfel hat keine endliche Teilüberdeckung. Unterteile diesen Würfel weiter und wähle wieder einen Unterwürfel, der keine endliche Teilüberdeckung hat.

Wir erhalten eine Folge von Würfeln

$$[-m, m]^n = Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \dots$$

die jeweils keine endliche Teilüberdeckung durch U_i 's besitzen.



Sei $x_i \in Q_i$ beliebig. Dann ist x_i eine Cauchy-Folge, also existiert $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, und $x \in Q_0$, da Q_0 abgeschlossen.

Somit gibt es ein U_j mit $x \in U_j$, da die $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von Q_0 waren. Damit ist auch $U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Wähle einen Würfel $x \in Q_k$ mit Kantenlänge $< \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, dann ist auch $Q_k \subseteq U(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass Q_k keine endliche Teilüberdeckung hat, ζ .

Also ist Q_0 kompakt. \square

Satz 5.13 (Bilder kompakter Räume). Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv und X kompakt. Dann ist auch Y kompakt.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von Y . Dann ist

$$\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}.$$

offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es $J \subseteq I$ endlich mit $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$. Dann ist

$$Y = f(X) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(U_j)) = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Also existiert eine endliche Teilüberdeckung von Y . □

Korollar 5.14. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, X kompakt und Y Hausdorff. Dann ist f abgeschlossen, d.h. $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen ist $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt nach [Theorem 5.7](#), also ist $f(A)$ kompakt nach [Theorem 5.13](#) (weil $f : X \rightarrow f(A) \subseteq Y$ surjektiv ist). Damit ist dann $f(A)$ abgeschlossen nach [Theorem 5.7](#).

Also sind Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. □

Korollar 5.15 (Homöomorphismen). Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y Hausdorff, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Umkehrabbildung stetig ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen auch $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Das gilt aber genau nach vorherigem [Korollar 5.14](#) □

Korollar 5.16. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch. Dann trägt Y die Quotiententopologie, d.h. $U \subseteq Y$ offen genau dann, wenn $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

Beweis. ' \implies ' folgt wegen Stetigkeit.

' \impliedby ' Ist $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen, dann ist $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ abgeschlossen in X , also folgt aus dem [Korollar 5.14](#)

$$Y \setminus U \stackrel{\text{surj.}}{=} f \left(\underbrace{f^{-1}(Y \setminus U)}_{\text{abgeschlossen}} \right).$$

abgeschlossen ist, also ist $U \subseteq Y$ offen. □

Kommen wir nun zum

Beweis von Theorem 3.9 (Fortsetzung). Schon gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & 2^{2\pi it} \end{array}$$

ist stetig und surjektiv und faktorisiert über

$$[0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^1.$$

mit f stetig und bijektiv. Wir wissen nun: S^1 ist Hausdorffsch und $[0, 1]$ ist kompakt. Nach Theorem 5.13 ist auch $[0, 1]/\{0, 1\}$ kompakt, also ist f ein Homöomorphismus nach Korollar 5.15 \square

Satz 5.17. Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X kompakt ist, sind A, B kompakt. Nach Lemma 5.5 existieren $\forall a \in A$ offene Mengen U_a, V_a mit $a \in U_a, B \subseteq V_a$ und $U_a \cap V_a = \emptyset$. Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a.$$

Also existieren $a_1, \dots, a_n \in A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}.$$

wegen A kompakt. Setze nun

$$U_A := \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \supseteq A \quad U_B := \bigcap_{i=1}^n V_{a_i} \supseteq B.$$

$\forall i$ ist

$$U_{a_i} \cap U_B \subseteq U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset.$$

und daraus folgt, dass

$$U_A \cap U_B = \emptyset.$$

\square

Satz 5.18 (Quotientenräume von Hausdorffräumen). Sei X kompakt und Hausdorffsch, $q : X \rightarrow Z$ surjektiv, wobei Z die Quotiententopologie trage. Dann sind äquivalent:

- 1) Z ist Hausdorffsch
- 2) q ist abgeschlossen

Beweis. Die Richtung '1) \implies 2)' ist genau Korollar 5.14 '2) \implies 1)': Jedes $z \in Z$ hat ein Urbild $x \in X$ unter q . Es ist $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen, da X hausdorffsch. Wegen q abgeschlossen folgt nun, dass auch

$$\{z\} = q(\{x\}).$$

abgeschlossen ist.

Definition 5.19 (saturierte Menge). Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heißt **saturiert**, falls $W = q^{-1}(q(W))$ (insbesondere sind alle Urbilder saturiert, und $\iff \forall x \in X \setminus W : q(x) \in Z \setminus q(W)$).

Bemerkung 5.20. Sei $U \subseteq X$ offen und saturiert, dann ist $q(U)$ offen. Hierzu schreibe

$$U = q^{-1}(q(U)) \implies q(U) \text{ offen.}$$

Seien $y \neq z \in Z$. Dann sind $\{y\}, \{z\}$ abgeschlossen und disjunkt. Dann sind auch

$$A = q^{-1}(y) \quad B = q^{-1}(z).$$

abgeschlossen und disjunkt (in X). Nach Annahme ist X kompakt und Hausdorff, also normal nach Satz 5.17. Also existieren $U_1, U_2 \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Setze

$$V_1 := X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_1)) \quad V_2 := X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_2)).$$

Behauptung 2. Es sind V_1, V_2 offen, disjunkt und saturiert und $A \subseteq V_1$ sowie $B \subseteq V_2$.

Unterbeweis. Nächstes Mal. ■

Es folgt, dass $q(V_1), q(V_2)$ offen in Z sind. Weiter ist $y \in q(A) \subseteq q(V_1)$ und $z \in q(B) \subseteq q(V_2)$. Da V_1, V_2 disjunkt und saturiert, sind auch $q(V_1), q(V_2)$ disjunkt und wir sind fertig. □

Vorlesung 5
Di 27 Apr 2021

Beweis der Behauptung. Es ist klar, dass V_1, V_2 offen sind. Für Disjunktheit sehen wir mit

$$X \setminus U_i \subseteq q^{-1}(q(X \setminus U_i)).$$

dass $U_i \supseteq X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_i)) = V_i$ Für Saturiertheit genügt es zu sehen, dass $q^{-1}(C)$ saturiert ist für alle $C \subseteq Z$, da

$$q^{-1}(q(q^{-1}(C))) = q^{-1}(C).$$

weil q surjektiv ist. Wegen

$$\begin{aligned} A \subseteq U_1 &\implies X \setminus A \supseteq X \setminus U_1 \\ &\implies q(X \setminus A) \supseteq q(X \setminus U_1) \\ &\implies \underbrace{q^{-1}(q(X \setminus A))}_{=X \setminus A} \supseteq q^{-1}q(X \setminus U_1) \end{aligned}$$

liefert nun Komplementbildung unser gewünschtes Ergebnis, dass

$$A \subseteq X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U_1)) = V_1.$$

□

Beispiel 5.21. $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ist Hausdorffsch.

Beweis. Es ist $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong S^n/x \sim -x$. Sei

$$q : S^n \rightarrow S^n/x \sim -x.$$

□

die Projektion. Da S^n kompakt und Hausdorffsch ist, ist $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ Hausdorffsch genau dann, wenn q abgeschlossen ist. Ist $A \subseteq S^n$, so ist $q^{-1}(Q(A)) = A \cup -A$. Da $- : S^n \rightarrow S^n$ ein Homöomorphismus ist, ist $-A$ abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist. Dann ist auch $A \cup -A$ abgeschlossen.

Korollar 5.22 (Projektiver Raum). Sei \sim auf $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ erzeugt durch $x \sim -x$ für alle $x \in S^{n-1} \subseteq D^n$. Dann ist

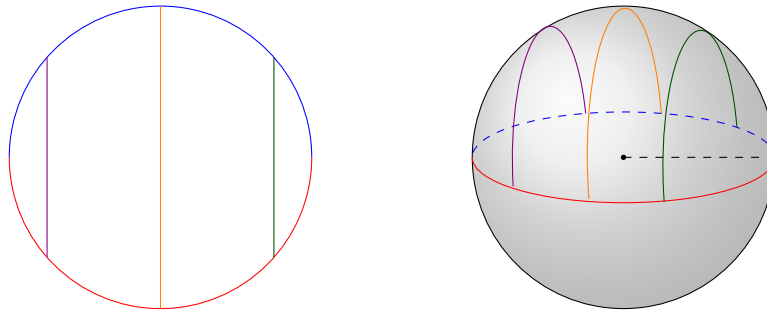
$$D^n / \sim \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n.$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong D^1 / \{-1, 1\} \cong [0, 1] / \{0, 1\} \cong S^1$$

Beweis. Betrachte die stetige Abbildung

$$f : \begin{cases} D^n & \longrightarrow & S^n \\ x & \longmapsto & (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{cases}$$



Wir erhalten das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \longrightarrow & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n / \sim & \xrightarrow{\bar{f}} & S^n / (x \sim -x) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n \end{array}$$

Wir sehen leicht, dass \bar{f} bijektiv ist. Da D^n kompakt, ist auch D^n / \sim kompakt, und $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ist Hausdorffsch, also handelt es sich um einen Homöomorphismus (mit [Korollar 5.15](#)) □

Korollar 5.23. Sei X kompakt und Hausdorffsch und $A \subseteq X$. Dann sind äquivalent

- 1) X/A ist Hausdorffsch
- 2) A ist abgeschlossen.

Beweis. '1) \implies 2)'. Ist X/A Hausdorffsch, so ist die einpunktige Menge $\{[A]\}$ abgeschlossen (nach **Theorem 4.4**). Also ist $q^{-1}(A) = A$ abgeschlossen nach Definition der Quotiententopologie.

'2) \implies 1)' Nach **Theorem 5.18** genügt es zu zeigen, dass $q : X \rightarrow X/A$ abgeschlossen ist. Für $B \subseteq X$ abgeschlossen ist, müssen wir also zeigen, dass $q(B)$ abgeschlossen ist, nach Definition also, dass $q^{-1}(q(B)) \subseteq X$ abgeschlossen ist. Nun ist

$$q^{-1}(q(B)) = \begin{cases} B & \text{falls } B \cap A = \emptyset \\ B \cup A & \text{falls } B \cap A \neq \emptyset \end{cases}.$$

abgeschlossen, weil A abgeschlossen ist. □

Beispiel 5.24. a) Es ist D^n/S^{n-1} Hausdorffsch. Alternativ können wir auch sehen, dass $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ ist. Hierzu betrachte die Projektion:

$$\begin{aligned} D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto \begin{cases} (2x, \sqrt{1 - \|2x\|^2}) & 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} \cdot x, -\sqrt{1 - (2-2\|x\|)^2}\right) & \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese ist stetig, denn falls $\|x\| = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = \frac{2-1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

und

$$\sqrt{1 - \|2x\|^2} = \sqrt{1 - 1} = 0 = -\sqrt{0} = -\sqrt{1 - (2-2\|x\|)^2}.$$

Ist $\|x\| = 1$, so ist

$$\frac{2-2\|x\|}{\|x\|} = 0.$$

und somit ist $f(x) = (0, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Also faktorisiert f über $\bar{f} : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$. Wir sehen wieder leicht, dass \bar{f} stetige Bijektion ist. Da D^n/S^{n-1} kompakt und S^n Hausdorffsch, folgt wieder, dass \bar{f} ein Homöomorphismus ist.

b) Wir erhalten nun eine Abbildung:

$$S^n \xrightarrow{q} S^n/(x \sim -x) \cong \mathbb{RP}^n \cong D^n/(x \sim -x) \longrightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$$

und diese ist im Allgemeinen kein Homöomorphismus, denn jeder Punkt hat 2 Urbilder.

6 Basen und Subbasen

Definition 6.1 (Basis). Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ eine Menge offener Mengen. Dann heißt \mathcal{S}

Basis, falls $\forall U \subseteq \mathcal{O}$ existiert $S_i \in \mathcal{S}$ mit $U = \bigcup_{i \in I} S_i$

Subbasis, falls $\forall U \in \mathcal{O}$ existieren I, K_i endlich sowie $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Bemerkung 6.2. Ist \mathcal{S} eine Basis, so ist \mathcal{S} eine Subbasis.

Beispiel 6.3. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{S} = \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

eine Basis der Topologie.

Satz 6.4 (Erzeugte Topologie). Sei X eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen. Dann existiert genau eine Topologie auf X , für die \mathcal{S} eine Subbasis ist, nämlich:

$$\mathcal{O} = \left\{ U \subseteq X \mid U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k \text{ mit } |K_i| < \infty, S_k \in \mathcal{S} \right\}.$$

Beweis. Übung als **Aufgabe 3.2**. □

Notation 6.5. Wir nennen \mathcal{O} die **von \mathcal{S} erzeugte Topologie**.

Lemma 6.6 (Stetigkeit auf Subbasiselementen). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, \mathcal{S} eine Subbasis von Y . Dann sind äquivalent:

- 1) f ist stetig
- 2) $f^{-1}(S)$ ist offen für alle $S \in \mathcal{S}$

Beweis. '1) \implies 2)' ist klar, da Subbasiselemente offen sind.

'2) \implies 1)'. Sei $U \subseteq Y$ offen, dann $\exists K_i$ endlich und $S_k \in \mathcal{S}$ mit

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

Dann ist aber genau

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} \underbrace{f^{-1}(S_k)}_{\text{offen}}.$$

offen, weil endliche Schnitte und beliebige Vereinigung offener Mengen offen sind. Also ist f stetig. \square

Satz 6.7. Eine Subbasis \mathcal{S} von (X, \mathcal{O}) ist eine Basis genau dann, wenn

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S} \exists S_i \in \mathcal{S} : S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Beweis. ' \implies ' Da $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sind diese offen. Dann ist auch $S_1 \cap S_2$ offen. Ist \mathcal{S} Basis, dann gibt es also $S_i \in \mathcal{S}$ mit

$$S_1 \cap S_2 = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

' \impliedby ' Angenommen, $U \subseteq X$ ist offen und von der Form

$$U = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{k \in K_i} S_k \right).$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Nach Annahme ist

$$\bigcap_{k \in K_i} S_k = \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

und damit ist

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

\square

Bemerkung* 6.8. Nach Annahme ist eigentlich erstmal der Schnitt von 2 Mengen die Vereinigung von S_i . Allerdings kann man dies per Induktion leicht auf n Teilmengen verallgemeinern, wenn wir

$$\bigcap_{k=1}^n S_k = S_1 \cap \bigcap_{k=2}^n S_k = S_1 \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (S_1 \cap S_k) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} S_j.$$

für geeignete $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ schreiben.

Satz 6.9 (Satz von Alexander). Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{S} eine Subbasis. Dann ist X kompakt genau dann, wenn jede Überdeckung durch Elemente aus \mathcal{S} eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beweis. ' \implies ' ist klar.

' \impliedby ' Angenommen, X ist nicht kompakt, dann betrachte die Menge

$$\mathcal{C} := \{U \mid U \text{ offene Überdeckung \underline{ohne} endliche Teilüberdeckung}\} \neq \emptyset.$$

Es ist \mathcal{C} partiell geordnet, indem wir $U \leq U'$ für $U \subseteq U'$ setzen.

Ist $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ eine Kette, so ist $\bigcup_{U_i} \in \mathcal{C}$, denn

- Offenbar ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.
- Hat $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung, so ist diese schon in einem U_i enthalten, und damit enthielte auch dieses U_i bereits eine endliche Teilüberdeckung
⚡

Wir können also das Lemma von Zorn anwenden, und somit existiert ein maximales Element $U \in \mathcal{C}$.

Behauptung 3. Ist $V \subseteq X$ offen und $V \not\subseteq U$, so hat $U \cup \{V\}$ eine endliche Teilüberdeckung

Unterbeweis. Sonst wäre $U \cup \{V\} \in \mathcal{C}$ und somit wäre U nicht maximal ■

Behauptung 4. $U \cap \mathcal{S}$ ist keine Überdeckung

Unterbeweis. Sonst hätte U eine endliche Teilüberdeckung nach Annahme. ■

Wegen Behauptung 2 existiert $x \in X$, der nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird. Sei $W \in U$ mit $x \in W$. Da W offen ist, folgt

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} S_k.$$

mit K_i endlich und $S_k \in \mathcal{S}$. Dann existieren also S_1, \dots, S_n mit

$$x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq W.$$

Da x nicht von $U \cap \mathcal{S}$ überdeckt wird, ist $S_i \notin U$. Aus der ersten Behauptung wissen wir nun aber, dass es $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i \in U$ mit

$$\{U_j^i\}_{j=1}^{n_i} \cup \{S_i\} \quad \text{ist Überdeckung von } X.$$

Sei nun

$$\hat{U} := \{U_j^i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i\} \subseteq U.$$

Für alle i gilt also

$$X \subseteq \bigcup_{V \in \hat{U}} V \cup S_i.$$

Also folgt

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_i.$$

und damit ist auch

$$X \setminus \bigcup_{V \in \hat{U}} V \subseteq S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq W \in U.$$

Also ist $\hat{U} \cup \{W\}$ eine endliche Teilüberdeckung von U , $\not\subseteq$.

□ Vorlesung 6
Do 29 Apr 2021

7 Produkte

Definition 7.1 (Produkttopologie). Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ ist die Topologie erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \subseteq X_1 \text{ offen}, U_2 \subseteq X_2 \text{ offen}\}.$$

Beispiel 7.2. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X_1 \times X_2$ haben wir die Metriken definiert durch

$$\begin{aligned} d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ \tilde{d}_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ \tilde{d}_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &:= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \end{aligned}$$

Dies Metriken sind paarweise äquivalent (leicht zu prüfen). Zudem sind ε -Bälle in d_{\max} gegeben durch

$$U_{d_{\max}}((x_1, x_2), \varepsilon) = U_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times U_{d_2}(x_2, \varepsilon).$$

D.h. die von d_{\max} induzierte Topologie ist die Produkttopologie.

Beispiel 7.3. Es ist $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei wir auf der linken Seite die Standardtopologie und auf der rechten Seite die Produkttopologie meinen.

Bemerkung 7.4. \mathcal{B} ist per Definition eine Subbasis der Produkttopologie, in der Tat handelt es sich jedoch sogar um eine Basis:

Beweis. Seien $U_1 \times U_2$ sowie $V_1 \times V_2 \in \mathcal{B}$ Basiselemente. Wir stellen fest, dass

$$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2).$$

das Produkt zweier Basiselemente ist, und somit sind wir fertig. □

Satz 7.5 (Projektion auf Komponenten). Die Projektionen

$$p_x : \begin{cases} X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{cases} \quad p_Y : \begin{cases} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{cases}$$

sind stetig und offen

Beweis. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann ist $p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}$, also offen. Analoges gilt für p_Y .

Sei $U \subseteq X \times Y$ offen. Dann können wir U schreiben als

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

OBdA können wir $V_i \neq \emptyset$ annehmen. Dann ist aber

$$p_X(U) = \bigcup_{i \in I} p_X(U_i \times V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X.$$

offen, also ist p_X offen. □

Was passiert mit der leeren Menge? Hierzu erinnern wir uns an

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

also

$$X \times \emptyset = \{(x, y) \mid x \in X, y \in \emptyset\} = \emptyset.$$

Bemerkung 7.6. Die Projektion p_X ist i.A. nicht abgeschlossen.

Beweis. Betrachte $A = \{(\frac{1}{n}, n) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Dann ist aber $p_1(A) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. □

Satz 7.7. Ist Y kompakt, so ist p_X abgeschlossen.

Beweis. Sei $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass $X \setminus p_X(A)$ offen ist, also wähle $x \in X \setminus p_X(A)$. Für alle $y \in Y$ ist $(x, y) \notin A$ (sonst wäre $x \in p_X(A)$), also gibt es

$$x \in U_y \subseteq X \quad y \in V_y \subseteq Y \text{ offen: } (U_y \times V_y) \cap A = \emptyset.$$

Damit sind die $\{V_y\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y und wir finden mit Y kompakt eine endliche Teilüberdeckung V_{y_1}, \dots, V_{y_n} von Y . Setzen wir nun

$$U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}.$$

so ist $U \subseteq X$ offen als endlicher Schnitt und wir stellen mit

$$U \times V_{y_i} \subseteq U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq (X \times Y) \setminus A.$$

fest, dass bereits $U \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus A$ (weil die V_{y_i} bereits Y überdecken). Nun muss aber bereits

$$U \subseteq X \setminus p_X(A).$$

gelten, und damit ist dieses U eine offene Umgebung von $x \in X \setminus p_X(A)$. \square

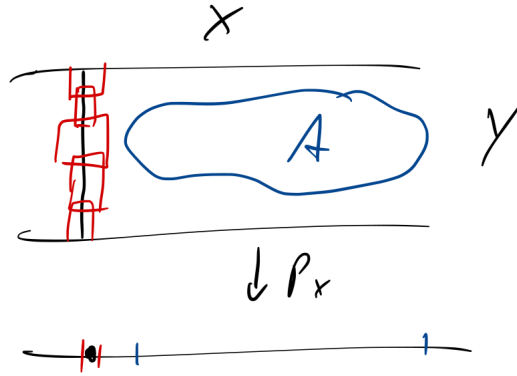


Abbildung 12: Beweisskizze zu **Theorem 7.7**

Lemma 7.8 (Subbasis der Produkttopologie). Seien X, Y topologische Räume. Die Menge

$$\mathcal{S} = \{U \times Y, X \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}.$$

ist eine Subbasis der Produkttopologie.

Beweis. Sei $W \subseteq X \times Y$ offen. Dann gibt es nach der Definition der Produkttopologie $U_i \subseteq X, V_i \subseteq Y$ offen mit

$$W = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i).$$

Also ist bereits

$$W = \bigcup_{i \in I} ((U_i \times Y) \cap (X \times V_i)).$$

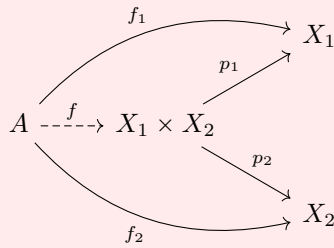
eine Vereinigung endlicher Schnitt von unseren Subbasiselementen.

Umgekehrt ist klar, dass alle Elemente aus \mathcal{S} auch offene Mengen in der Produkttopologie sind, da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. \square

Satz 7.9 (Universelle Eigenschaft des Produkts). Seien A, X_1, X_2 topologische Räume sowie $f_i : A \rightarrow X_i$. Dann ist die Abbildung

$$(f_1 \times f_2) =: f \begin{cases} A & \longrightarrow X_1 \times X_2 \\ a & \longmapsto (f_1(a), f_2(a)) \end{cases}$$

stetig genau dann, wenn f_1, f_2 stetig sind.



Beweis. Es ist $f_i = p_i \circ f$. Ist f stetig, so ist f_i stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Angenommen, es sind f_1, f_2 stetig. Wir müssen zeigen, dass für alle $U_1 \times U_2 \subseteq X_1 \times X_2$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen auch $f^{-1}(U_1 \times U_2)$ offen ist. Hierzu stellen wir aber fest, dass

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2).$$

offen ist. □

Beispiel 7.10. a) Wir behaupten, dass

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \cong S^n \times (0, \infty) \cong S^n \times \mathbb{R}.$$

ist. Betrachte hierzu

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & S^n \times (0, \infty) \\ x & \longmapsto & \left(\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2 \right) \end{cases}$$

Wir sehen nun mit der universellen Eigenschaft sofort, dass es sich um eine stetige Abbildung handelt. Zudem haben wir die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} S^n \times (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (y, t) &\longmapsto t \cdot y \end{aligned}$$

Wir müssen noch prüfen, dass diese stetig ist (Übung), dann haben wir einen Homöomorphismus.

b) $S^1 \times S^1$ ist ein Torus. Betrachte hierzu

$$\varphi : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ (s, t) & \longmapsto & (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \end{cases}$$

φ ist stetig und erfüllt $\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1)$ sowie $\varphi(0, t) = \varphi(1, t)$. Also faktori-

siert φ wie gewünscht als

$$\begin{array}{ccc} [0, 1]^2 & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times S^1 \\ \downarrow & \nearrow \varphi' & \\ [0, 1]^2 / \sim & & \end{array} \quad \text{wobei } \sim \text{ die Relation}$$

ist, die wir für die Konstruktion des Torus verwendet hatten. φ' ist stetig und surjektiv nach der Universellen Eigenschaft, und wir sehen leicht, dass

φ' injektiv ist. Also ist φ' stetig und bijektiv. Nun ist aber $[0, 1]^2$ kompakt und $S^1 \times S^1$ Hausdorff (z.B. als metrisierbare Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$), und somit ist φ' ein Homöomorphismus nach **Korollar 5.15**

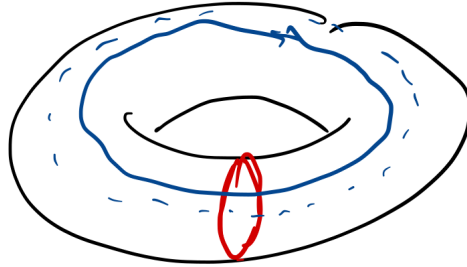


Abbildung 13: Die Einbettung von $T \cong S^1 \times S^1$

Korollar 7.11 (Komponente eines Produkts). Seien X, Y topologische Räume sowie $y \in Y$. Dann ist $X \cong X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ mittels $x \mapsto (x, y)$.

Beweis. Nenne diese Abbildung f , also

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow & X \times Y \\ x & \longmapsto & (x, y) \end{cases}$$

f ist stetig, da sowohl id_X als auch

$$c_Y : \begin{cases} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y \end{cases}$$

stetig sind (mit universeller Eigenschaft). f faktorisiert nun über $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ und $f : X \rightarrow X \times \{y\}$ ist offensichtlich bijektiv. Wir müssen also noch zeigen, dass f offen ist.

Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $U \times Y \subseteq X \times Y$ offen. Es ist zudem

$$f(U) = U \times \{y\} = U \times Y \cap X \times \{y\} \subseteq X \times \{y\}.$$

in $X \times \{y\}$ offen. □

Satz 7.12 (Produkteigenschaften). Seien X, Y topologische Räume.

- 1) Sind X und Y Hausdorffsch, so auch $X \times Y$
- 2) Sind X und Y kompakt, so auch $X \times Y$.

Beweis. 1) Seien $(x, y) \neq (x', y') \in X \times Y$. Dann ist $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. OBdA sei $x \neq x'$. Dann existieren $U, U' \subseteq X$ offen mit $x \in U, x' \in U'$ und $U \cap U' = \emptyset$, weil X Hausdorffsch. Dann sind

$$(x, y) \in U \times Y \quad (x', y') \in U' \times Y.$$

jeweils offen, und ihr Schnitt ist

$$(U \times Y) \cap (U' \times Y) = (U \cap U') \times Y = \emptyset.$$

Also ist $X \times Y$ Hausdorffsch.

- 2) Wir wollen den **Satz von Alexander (6.9)** verwenden. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen der Form $U \times Y$ oder $X \times V$. Sei

$$W = \bigcup_{U \times Y \in \mathcal{U}} U \subseteq X \quad W' = \bigcup_{X \times V \in \mathcal{U}} V \subseteq Y.$$

Ist $W = X$, so existiert eine endliche Teilüberdeckung von $\{U \mid U \times Y \in \mathcal{U}\}$ durch U_1, \dots, U_n . Dann ist bereits

$$\{U_i \times Y \mid i = 1, \dots, n\}.$$

eine endliche Teilüberdeckung von $X \times Y$. Für $W' = Y$ verfahren wir genauso. Ist $W \neq X$ und $W' \neq Y$, so existiert $x \in X \setminus W, y \in Y \setminus W'$. Dann ist (x, y) aber nicht von \mathcal{U} überdeckt, weil er von keinem $U \times Y$ und von keinem $X \times V$ überdeckt wird, ζ .

Also finden wir in beiden Fällen eine endliche Teilüberdeckung.

□

Bemerkung 7.13. Der Beweis geht auch ohne den **Satz von Alexander**. Viel leichter: Es genügt, offene Überdeckungen bezüglich einer Basis zu betrachten (Spezialfall von Alexander, leicht zu zeigen), dann verfahren wir wie folgt: Sei \mathcal{U} eine Überdeckung von $X \times Y$ mit Elementen aus \mathcal{B} . Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $X \times \{y\}$. Sei diese $\{U_i^y \times V_i^y\}_{i=1}^{n_y}$. Setze

$$V_y := \bigcap_{i=1}^{n_y} V_i^y.$$

Dann ist dies eine Überdeckung von $X \times Y$. Die V_y bilden nun eine offene Überdeckung von Y , also finden wir wieder eine endliche Teilüberdeckung durch V_{y_1}, \dots, V_{y_n} . Da wir aber die $X \times V_{y_i}$ jeweils endlich überdeckt haben, können wir nun auch $X \times Y$ endlich überdecken.

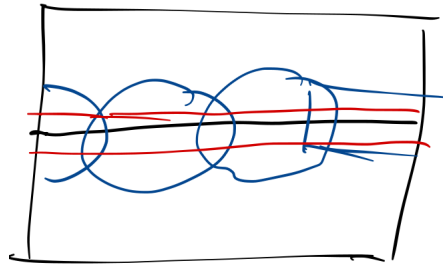


Abbildung 14: Skizze für den alternativen Beweis von **Theorem 7.28** für endlich viele Räume.

Definition 7.14 (Produkt endlich vieler Mengen). Seien X_1, \dots, X_n topologische Räume. Dann definieren wir ihr Produkt rekursiv durch

$$X_1 \times \dots \times X_n := (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

Lemma 7.15 (Basis des Produktes). Seien X, Y topologische Räume mit Basen $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$. Dann ist

$$\mathcal{B}_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}.$$

eine Basis der Topologie auf $X \times Y$.

Korollar 7.16 (Basis endlicher Produkte). Die Mengen $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ mit $U_i \subseteq X_i$ offen sind eine Basis der Topologie auf $X_1 \times \dots \times X_n$. Insbesondere ist die Topologie unabhängig von der Klammerung.

Beweis. Setze $\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}$. □

Beweis von Lemma 7.15. Seien $W \in X, W' \subseteq Y$ offen. Dann existieren $U_i \in \mathcal{B}_X$ sowie $V_j \in \mathcal{B}_Y$ mit

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \quad W' = \bigcup_{j \in J} V_j.$$

Dann ist bereits:

$$W \times W' = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} U_i \times V_j.$$

Ist nun $A \subseteq X \times Y$ beliebig offen, so gilt

$$A = \bigcup W_i \times W'_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} U_i \times V_j.$$

Umgekehrt ist klar, dass die $U_i \times V_j$ offen in der Produkttopologie sind. □

Bemerkung* 7.17. Im Beweis wurden - der Einfachheit halber - manche Indexmengen weggelassen. Es ist aber leicht einzusehen, dass es sich hierbei nur um ein formales Detail handelt.

Bemerkung* 7.18. Eigentlich haben wir im Beweis von **Korollar 7.16** die Aussage von **Lemma 7.15** für beliebig viele Räumen (endlich viele) benutzt. Man verallgemeinert das Lemma jedoch induktiv leicht auf endlich viele Räume:

Beweis von Lemma 7.15.* Den Fall $n = 2$ verwenden wir als Induktionsanfang, er wurde bereits gezeigt. Seien nun X_1, \dots, X_n mit Basen \mathcal{B}_i gegeben, dann wissen wir per Induktionsannahme bereits, dass

$$\mathcal{B}_{X_1 \times \dots \times X_{n-1}} := \{U_1 \times \dots \times U_{n-1} \mid U_i \in \mathcal{B}_i\}.$$

eine Basis von $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ ist. Zudem ist \mathcal{B}_n eine Basis von X_n und somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n} &:= \{(U_1 \times \dots \times U_{n-1}) \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &= \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \mathcal{B}_i\} \\ &=: \mathcal{B}_{X_1 \times \dots \times X_n} \end{aligned}$$

eine Basis von $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times \dots \times X_n$ und der Induktionsschritt ist erbracht. \square

Satz 7.19 (Diagonaleigenschaft). Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X Hausdorffsch, genau dann, wenn

$$\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

abgeschlossen ist.

Notation 7.20. Wir nennen $\Delta_X \subseteq X^2$ die **Diagonale von X** .

Beweis. ' \implies ' Nimm an, dass X Hausdorffsch ist und sei $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$, d.h. $x \neq y$. Dann existieren U_x, U_y offen (in X), sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$. Also ist

$$(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \setminus \Delta_X.$$

, denn wenn $(a, b) \in U_x \times U_y$, dann ist $a \neq b$. Also ist $X \times X \setminus \Delta_X$ offen nach Definition. ' \impliedby ' Nimm nun an, dass die Diagonale abgeschlossen ist. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ beliebig. Dann ist

$$(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i.$$

Also ist $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta_X$ für eine Wahl von U, V . Dann ist aber $x \in U, y \in V$ sowie $U \cap V = \emptyset$, denn wenn $a \in U \cap V$, so $(a, a) \in U \times V \cap \Delta_X = \emptyset$, ζ . \square

Definition 7.21 (Produkte beliebiger Mengen). Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf

$$\prod_{i \in I} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}.$$


ist die Topologie erzeugt von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ U_j \times \prod_{i \neq j} X_i \mid j \in I, U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

Bemerkung 7.22. • \mathcal{S} ist wirklich nur eine Subbasis. Eine Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \mid J \subseteq I \text{ endlich, } U_j \subseteq X_j \text{ offen} \right\}.$$

d.h. wir dürfen bei endlich vielen Faktoren eine endliche Teilmenge wählen, und wählen in den restlichen Faktoren den ganzen Raum

- Ist I endlich, so stimmt dies mit der vorherigen Definition überein, weil wir für die Basis jeweils $J = I$ wählen können.
-  Ist I unendlich, so ist im Allgemeinen

$$\prod_{i \in I} U_i.$$

mit $U_i \subseteq X_i$ offen nicht offen.

Bemerkung* 7.23 (Mengentheorie-Spam). • Wir benötigen das Auswahlaxiom, um einzusehen, dass obiges Produkt überhaupt nichtleer ist, sofern keiner der Faktoren leer ist. Formal ist das Produkt der X_i nämlich definiert als

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i: f(i) \in X_i \right\}.$$

und das Auswahlaxiom besagt genau, dass es für jede solche Familie nichtleerer Mengen (mindestens) eine solche Funktion gibt (es ist also äquivalent dazu, dass die Produkte nichtleer sind).

- Im Gegensatz zu dem, was in der Vorlesung genannt wurde, ist es kein Problem, wenn $I = \emptyset$, also die Familie leer ist. Dann ist nämlich

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : \emptyset \rightarrow \emptyset \mid \forall i: f(i) \in \emptyset\} = \{\emptyset\}.$$

nicht leer. (Hierzu sollte man sich klarmachen, dass eine Funktion $f : A \rightarrow B$ eine Teilmenge von $A \times B$ war, sodass $\forall a \in A \exists ! b \in B : (a, b) \in f$, und somit suchen wir eine Teilmenge $f \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$).

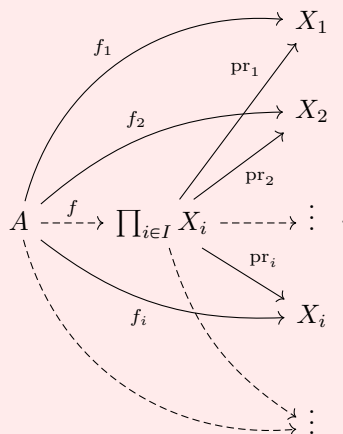
Auch die Topologie ist in diesem Fall wohldefiniert, weil die Subbasis wieder die leere Menge ist (nämlich eine Teilmenge von $\prod X_i = \{\emptyset\}$, und zwar $\{\emptyset\}$ selbst), und diese ist auch eine vollständige Topologie, weil unser topologischer Raum nur einen Punkt enthält (nämlich \emptyset). Wir erhalten also den einpunktigen topologischen Raum.

Vorlesung 7
Di 04 Mai 2021

Satz 7.24 (Universelle Eigenschaft des Produkts). Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume, A ein topologischer Raum und seien $f_i : A \rightarrow X_i$ Funktionen. Sei

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \\ a & \longmapsto (f_i(a))_{i \in I} \end{cases}$$

Dann ist f stetig genau dann, wenn alle f_i stetig sind.



Bemerkung* 7.25. Die Universelle Eigenschaft ist genau genommen die Folgende:

Seien $(X_i)_{i \in I}$ topologische Räume. Ein topologischer Raum X zusammen mit Abbildungen $pr_i : X \rightarrow X_i$ wird Produkt der X_i genannt, wenn es für jedes A und stetige Abbildungen $f_i : A \rightarrow X_i$ genau eine induzierte Abbildung $f : A \rightarrow X$ gibt.

Diese Eigenschaft ist nun universell im Sinne der Kategorientheorie, d.h. bis auf eindeutig bestimmten Isomorphismus gibt es nur ein Paar $(X, (pr_i)_{i \in I})$, das die oben genannten Eigenschaften bestimmt.

Wir haben zwar oben nicht die Eindeutigkeit des Produkts gezeigt, aber dessen Existenz (was aus der Kategorientheorie nicht folgt), indem wir ein explizites solches Objekt konstruiert haben.

Bemerkung* 7.26. Insbesondere sollte man sich merken, dass die kanonischen Projektionen pr_i wichtiger Teil der Information eines Produktes sind. Bei unserer expliziten Konstruktion 'kanonisch', denkbar ist jedoch auch, eine völlig andere Trägermenge des Produkts zu wählen, dann ist die Angabe der Projektionen essentiell.

Lemma und Definition 7.27. Sei $j \in I$, setze

$$pr_j : \begin{cases} \prod_{i \in I} X_i & \longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i \in I} & \longmapsto x_j \end{cases}$$

als **Projektion** auf die j -te Komponente. Dann ist pr_j stetig.

Beweis. Ist $U \subseteq X_j$ offen, dann ist $pr_j^{-1}(U) = U \times \prod_{i \neq j} X_i \in \mathcal{S}$ ein Element der Subbasis der Produkttopologie, also offen. Also ist pr_j stetig. \square

Beweis von Theorem 7.24. ' \implies ' $f_j = pr_j \circ f$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig:

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetig, dann ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis. Ist $U \subseteq Z$ offen, so ist

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X.$$

offen, indem wir zunächst g stetig und dann f stetig verwenden. \square

' \Leftarrow ' Es genügt zu zeigen, dass $f^{-1}(Y) \subseteq A$ offen ist für alle $Y \in \mathcal{S}$. Sei also solch ein $Y \in \mathcal{S}$ beliebig, dann ist dieses von der Form

$$Y = U \times \prod_{i \neq j} X_i.$$

Dann ist $f^{-1}(Y) = f_j^{-1}(U) \subseteq A$ offen, da f_j stetig ist. \square

Satz 7.28 (Satz von Tychonoff). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt.

Beweis. Wir verwenden wieder den **Satz von Alexander** (Theorem 6.9). Sei \mathcal{U} eine Überdeckung durch Elemente aus \mathcal{S} . Sei $\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}$ gegeben durch die Elemente V von \mathcal{U} der Form

$$V = W \times \prod_{i \neq j} X_i \quad \text{mit } W \subseteq X_j \text{ offen.}$$

Dann ist

$$\mathcal{U} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_j.$$

Ist nun

$$\text{pr}_i(\mathcal{U}_i) = \{\text{pr}_i(V) \mid V \in \mathcal{U}_i\}.$$

eine offene Überdeckung von X_i , so existiert - weil X_i kompakt - eine endliche Teilüberdeckung $\text{pr}_i(V_1) \cup \dots \cup \text{pr}_i(V_k)$ von X_i mit $V_j \in \mathcal{U}_i$. Dann ist V_1, \dots, V_k eine endliche Teilüberdeckung von $\prod_{i \in I} X_i$.

Wir sind also fertig, außer im Fall

Ⓐ: $\text{pr}_i(\mathcal{U}_i)$ ist keine Überdeckung von X_i für alle $i \in I$.

Dann finden wir $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{U}_i} \text{pr}_i(V)$ für jedes $i \in I$. Dann ist aber der Punkt

$$(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i.$$

nicht von \mathcal{U} überdeckt: Ist $(x_i)_{i \in I} \in V \in \mathcal{U}$, dann gibt es $i \in I$ mit $V \in \mathcal{U}_i$, und daraus folgt bereits $x_i \in \text{pr}_i(V)$, ∇ . □

Bemerkung 7.29. Eigentlich haben wir die Notation pr_j für die Projektion $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ eingeführt, manchmal schreiben wir aber auch einfach nur p_j .

Beispiel 7.30. a) Seien X_1, \dots, X_n diskrete Räume. Dann ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ diskret.

Beweis. Es ist

$$\{(x_1, \dots, x_n)\} = \{x_1\} \times \dots \times \{x_n\}.$$

Element der Produkttopologie, weil die $\{x_i\} \subseteq X_i$ offen sind. Also sind alle Punkte offen. □

b) Betrachte $\{0, 2\}$ mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} =: \{0, 2\}^{\mathbb{N}}.$$

kompakt nach dem **Satz von Tychonoff**. Dann ist $\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\}$ aber nicht diskret, weil wir sonst die offene Überdeckung

$$\prod_{\mathbb{N}} \{0, 2\} = \bigcup_{x \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}} \{x\}.$$

hätten, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung* 7.31. Das Beispiel zeigt die wichtige Eigenschaft, dass nicht (notwendigerweise) alle Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i$ für $U_i \subseteq X_i$ offen auch im Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ offen sind.

Satz 7.32. Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen, so ist auch $\prod_{i \in I} X_i$ Hausdorffsch.

Beweis. Ist $(x_i)_{i \in I} \neq (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$, dann gibt es $i \in I$ mit $x_i \neq y_i$. Da X_i Hausdorffsch ist, existieren $U_i, V_i \subseteq X_i$ offen mit $x_i \in U_i, y_i \in V_i$ und $U_i \cap V_i = \emptyset$. Dann sind aber beretis

$$U_i \times \prod_{i \neq j} X_j \quad V_i \times \prod_{i \neq j} X_j.$$

zwei disjunkte, offene Umgebungen von $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$. \square

Wir wollen uns im Folgenden fragen, wann wir Räume in 'schöne' Räume einbetten können, wobei 'schön' für uns kompakt + Hausdorff heißen soll.

Definition 7.33 (Abschluss, Dichtheit). Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

- 1) Der **Abschluss** \bar{Y} ist definiert als

$$\bar{Y} := \bigcap_{\substack{Y \subseteq A \\ A \subseteq X \text{ abg.}}} A.$$

Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist \bar{Y} selbst abgeschlossen (wie der Name suggeriert).

- 2) Y ist **dicht** in X , falls $\bar{Y} = X$.

Definition 7.34 (Einbettung). Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f eine **Einbettung**, falls $f : X \rightarrow f(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Definition 7.35 (Kompaktifizierung). Sei $\iota : Y \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Dann ist X eine **Kompaktifizierung** von Y , falls

- 1) X ist kompakt und Hausdorffsch.
- 2) $\iota(Y) \subseteq X$ ist dicht (in X).

Definition 7.36 (Vollständige Regularität). Ein topologischer Raum X ist **vollständig regulär**, falls

- 1) X ist Hausdorffsch
- 2) $\forall A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$ existiert eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]$, sodass $f(x) = 1$ und $f|_A \equiv 0$

Bemerkung 7.37. Jeder vollständig reguläre Raum ist regulär. Hierzu betrachte $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ sowie $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$. Diese sind offenbar disjunkt, offen, und Umgebungen von x bzw. A .

Lemma 7.38. Ist X vollständig regulär und $Y \subseteq X$, dann ist auch Y vollständig regulär.

Beweis. 1) Da X Hausdorffsch ist, ist auch Y Hausdorffsch.

2) Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen und $y \in Y \setminus A$. Dann existiert $A' \subseteq X$ abgeschlossen mit $A' \cap Y = A$. Da X vollständig regulär ist, gibt es $f : X \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f|_{A'} \equiv 0$ und $f(y) = 1$. Dann erfüllt $f|_Y : Y \rightarrow [0, 1]$ unsere gewünschten Bedingungen, weil

$$(f|_Y)|_A \equiv 0 \quad f|_Y(y) = 1.$$

□

Satz 7.39. X ist genau dann vollständig regulär, wenn X eine Kompaktifizierung besitzt.

Beweis. Eine Richtung sei hier schon skizziert: Sei Y eine Kompaktifizierung von X . Da Y kompakt und Hausdorffsch, ist Y normal (nach [Theorem 5.17](#)). Wir zeigen später, dass dann Y auch vollständig regulär ist. Mit [Lemma 7.38](#) ist also auch $X \subseteq Y$ vollständig regulär. □

Bemerkung* 7.40. Hier verwenden wir entscheidend, dass wir nicht nur $X \hookrightarrow Y$ injektiv abgebildet, sondern eingebettet im Sinne von [Definition 7.34](#) haben, damit wir X auch homöomorph mit einem Teilraum $X \subseteq Y$ identifizieren können.

Wir wollen nun zu einem beliebigen Raum eine Kompaktifizierung konstruieren. Sei X ein topologischer Raum. Sei

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ stetig}\}.$$

Nach dem [Satz von Tychonoff](#) ist $\prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1]$ kompakt und nach [Theorem 7.32](#) Hausdorffsch. Definiere nun eine Abbildung

$$\iota : X \rightarrow \prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1].$$

durch die Komponenten $\iota_f(x) = f(x)$. (wir benutzen also in der f -ten Komponente einfach die Abbildung f). Da alle $f \in \mathcal{C}(X)$ stetig sind, ist ι stetig (nach [Theorem 7.24](#)). Setze nun

$$\beta X := \overline{\iota(X)} \subseteq \prod_{\mathcal{C}(X)} [0, 1].$$

$\beta(X)$ ist kompakt und Hausdorffsch als abgeschlossener Teilraum eines kompakten Hausdorffraums.

Satz und Definition 7.41 (Stone-Čech-Kompaktifizierung). Für einen topologischen Raum X heißt der eben konstruierte Raum $\beta X = \beta(X)$ **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X . βX ist ein kompakter Hausdorffraum.

*Beweis**. Klar nach eben gesagtem, wir verwenden den **Satz von Tychonoff** und **Theorem 7.32**. \square

Warnung. Diese ist jedoch nur eine Kompaktifizierung im Sinne von **Definition 7.35** falls X vollständig regulär ist.

Bemerkung* 7.42. Wir wissen schon, dass es sich im Allgemeinen nicht um eine Kompaktifizierung nach **Definition 7.35** handeln kann, weil wir im Beweis von **Theorem 7.39** gezeigt haben, dass eine Kompaktifizierung nur für vollständig reguläre Räume existieren kann. Der folgende Satz zeigt nun, dass es sich bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung tatsächlich um eine handelt, wenn X vollständig regulär ist:

Satz 7.43. $\iota : X \rightarrow \prod_{C(X)} [0, 1]$ ist eine Einbettung, falls X vollständig regulär ist.

Beweis. Injektivität: Seien $x \neq y \in X$. Dann sind $\{x\}, \{y\} \subseteq X$ abgeschlossen und es existiert $f : X \rightarrow [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$ (hier benutzen wir die vollständige Regularität). Dann ist aber bereits $\iota(x) \neq \iota(y)$ in Komponenten f .

Einbettung: Wir müssen noch zeigen, dass $\forall U \subseteq X$ offen $\iota(U) \subseteq \iota(X)$ offen ist, damit $\iota : X \rightarrow \iota(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $U \subseteq X$ offen, setze $A := X \setminus U$ und sei $x \in U$. Dann finden wir (nach vollständiger Regularität von X) eine Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$, sodass $f(x) = 1$ und $f|_A = 0$. Setze

$$V := \left(\frac{1}{2}, 1 \right]_f \times \prod_{C(X) \setminus \{f\}} [0, 1] \subseteq \prod_{C(X)} [0, 1].$$

als offene Teilmenge von $\prod_{C(X)} [0, 1]$. Dann ist

$$\iota(x) \in \underbrace{V \cap \iota(X)}_{\text{offen in } \iota(X)} \subseteq \iota(X \setminus A) = \iota(U).$$

Damit ist $\iota(U) \subseteq \iota(X)$ Umgebung all seiner Punkte, also selbst offen. \square

Bemerkung 7.44. Ist K kompakt und Hausdorffsch, so ist $\iota(K) \subseteq \prod_{C(K)} [0, 1]$ kompakt, also abgeschlossen, da $\prod_{C(K)} [0, 1]$ kompakt, und deswegen ist $\beta(K) = \overline{\iota(K)} = \iota(K) \cong K$.

Bemerkung* 7.45. Dass $\iota(K) \cong K$ folgt in vorheriger Bemerkung daraus, dass wir wegen K kompakt und Hausdorffsch nach **Theorem 5.17** wissen, dass K

normal ist, und dann (mit der noch nicht bewiesene Implikation $\text{normal} \implies \text{vollständig regulär}$) den vorherigen [Theorem 7.43](#) anwenden können, weswegen ι eine Einbettung ist und somit einen Homöomorphismus $K \cong \iota(K)$ induziert.

Beweis von [Theorem 7.39](#).* Wir haben bereits gesehen, dass ein kompaktifizierbarer Raum notwendigerweise vollständig regulär ist (im ersten Teil des Beweises). Ist X nun vollständig regulär, so ist $\beta(X)$ ein kompakter Hausdorff-Raum, und nach [Theorem 7.43](#) handelt es sich bei $\iota_X : X \rightarrow \beta(X)$ genau um eine Einbettung. \square

Lemma 7.46 (Fortsetzung stetiger Funktionen). Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig sowie $U \subseteq X$.

- 1) Dann ist $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$
- 2) Ist $U \subseteq X$ dicht, $g : X \rightarrow Y$ auch stetig und $f|_U = g|_U$ sowie Y Hausdorffsch, so ist $f = g$

Bemerkung* 7.47. Der Beweis von [Lemma 7.46](#) ist genau [Aufgabe 4.1](#).

Beweis von [Lemma 7.46](#).* 1) Sei $y \in f(\overline{U})$, also gibt es $x \in \overline{U}$ mit $f(x) = y$. Sei $V \subseteq Y$ eine beliebige offene Umgebung von y . Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x nach Stetigkeit von f . Da $x \in \overline{U}$ ist $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$ und wir wählen $x_0 \in f^{-1}(V) \cap U$. Dann ist $f(x_0) \in V \cap f(U)$ und somit $V \cap f(U) \neq \emptyset$. Da V beliebig war, ist nach Definition $y \in \overline{f(U)}$.

- 2) Nimm an, dass $f \neq g$, dann gibt es $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Da Y Hausdorffsch, können wir die beiden Punkte durch offene Mengen trennen, also finden wir U_f, U_g mit $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$ mit $U_f \cap U_g = \emptyset$ und U_f, U_g offen. Dann sind auch $f^{-1}(U_f), g^{-1}(U_g)$ offene Mengen nach Stetigkeit von f, g , also ist auch $f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g) = \emptyset$. Zudem $x \in f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$, da $f(x) \in U_f, g(x) \in U_g$ nach Voraussetzung. Da $U \subseteq X$ dicht ist, ist $U \cap (f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)) \neq \emptyset$ und wir finden $x_0 \in U \cap f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$. Dann ist wegen $f|_U = g|_U$ $f(x_0) = g(x_0)$, aber auch $f(x_0) \in U_f, g(x_0) \in U_g$, also $f(x_0) = g(x_0) \in U_f \cap U_g$. Aber nach Voraussetzung ist $U_f \cap U_g = \emptyset$, \downarrow . Also $f = g$.

\square

Satz 7.48 (Universelle Eigenschaft von β). Sei $f : X \rightarrow K$ stetig, K kompakt und Hausdorffsch. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow K$, so dass

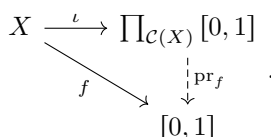
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota} & \beta(X) \\ f \downarrow & \swarrow \hat{f} & \\ K & & \end{array} .$$

kommutiert.

Ist $f(X) \subseteq K$ dicht, so ist \hat{f} surjektiv: Es ist $\hat{f}(\beta(X))$ kompakt, also abgeschlossen und enthält $f(X)$ (weil das Diagramm kommutiert), und daraus folgt $\overline{f(X)} \subseteq \hat{f}(\beta(X))$.

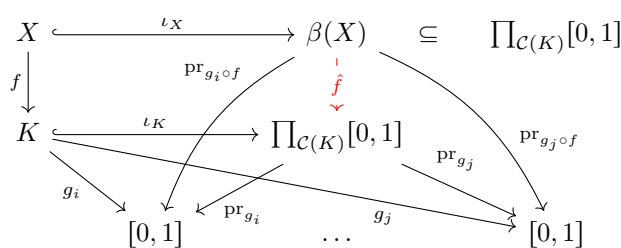
Beweis. Die Eindeutigkeit von \hat{f} folgt direkt aus Lemma 7.46, weil \hat{f} über die Kommutativität des Diagramms auf der dichten Teilmenge $\iota(X) \subseteq \beta(X)$ bereits eindeutig bestimmt ist.

Idee. Ist $K = [0, 1]$, so wähle $\hat{f} = \text{pr}_f |_{\beta(X)}$ als stetige Projektion. Dann kommutiert nämlich



nach Konstruktion von ι .

Das ganze können wir nun zwar nicht direkt für K machen, allerdings für jedes $g \in \mathcal{C}(K)$. Für jedes $g \in \mathcal{C}(K)$ erhalten wir durch Komposition $g \circ f \in \mathcal{C}(X)$ und damit nach vorheriger Überlegung eine Abbildung $\text{pr}_{g \circ f} |_{\beta(X)}: \beta(X) \rightarrow [0, 1]$. Verwenden wir diese als Komponentenabbildung nach $\prod_{\mathcal{C}(K)} [0, 1]$, so induzieren wir eine Abbildung $\hat{f} = \prod \text{pr}_{g \circ f} |_{\beta(X)}$:



Das linke obere Quadrat kommutiert auch: Hierzu müssen wir überprüfen, dass die Kompositionen mit den Projektionen auf die Komponenten von $\prod_{\mathcal{C}(K)} [0, 1]$ jeweils gleich sind, diese sind aber - nach Konstruktion - jeweils $g_i \circ f$.
 Wegen $\iota(\overline{X}) = \beta(X)$ ist nun

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\beta(X)) &= \hat{f}(\overline{\iota_X(X)}) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 7.46}}{\subseteq} \overline{(\hat{f} \circ \iota_X)(X)} \\
 &\stackrel{\text{kommutiert}}{=} \overline{(\iota_K \circ f)(X)} \\
 &\subseteq \overline{\iota_K(K)} \\
 &\stackrel{K \text{ kompakt}}{=} \iota_K(K) \\
 &\stackrel{\text{Theorem 7.43}}{\cong} K
 \end{aligned}$$

und damit können wir \hat{f} mit ι_K^{-1} verknüpfen um unsere gewünschte Abbildung $\beta(X) \rightarrow K$ zu erhalten. \square

Trivial Nonsense* 7.49. $\beta(X)$ ist sogar ein Funktor von **Top** (Kategorie der topologischen Räume) nach **CHaus** (Kategorie der kompakten Hausdorff-Räume). Das liegt daran, dass wir im Beweis von **Theorem 7.48** alle Schritte bis $\hat{f}(\beta(X)) \subseteq \iota_k(K) = \beta(K)$ genauso durchführen können, ohne verwenden zu müssen, dass K kompakter Hausdorff-Raum ist, und wir damit für $f : X \rightarrow K$ eine entsprechende Abbildung $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow \beta(K)$ induzieren, sodass

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & \beta(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ K & \xrightarrow{\iota_K} & \beta(K) \end{array}$$

kommutiert. Alternativ können wir auch **Theorem 7.48** auf die Abbildung $\iota_k \circ f : X \rightarrow \beta(K)$ anwenden, da $\beta(K)$ nach Konstruktion kompakt und Hausdorffsch ist.

Bemerkung* 7.50. Man sollte nicht zu sehr darüber nachdenken, wie $\beta(X)$ aussieht: Die Konstruktion des Raumes ist äußerst nicht-konstruktiv und benutzt implizit das Auswahlaxiom (damit wir Tychonoff nutzen können. Man kann sich auch überlegen, dass der Satz von Tychonoff äquivalent ist zum Auswahlaxiom, weswegen wir auch nicht ohne es auskommen, das geht hier aber zu weit). Vielmehr sollte man die bloße Existenz eines solchen Raumes als theoretisches Ergebnis im Hinterkopf behalten, die wir benötigt haben, um die Frage nach der Kompaktifizierbarkeit eines Raumes zu beantworten. Auch der Spezialfall, dass $\beta(X) = X$ für kompakte Hausdorff-Räume ist wichtig.

Vorlesung 8
Do 06 Mai 2021

8 Vereinigungen

Definition 8.1 (Disjunkte Vereinigung). Es sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Die **disjunkte Vereinigung** der X_i ist definiert als

$$\coprod_{i \in I} X_i := \{(i, x) \mid i \in I, x \in X_i\}.$$

Lemma 8.2. Für jedes $j \in I$ ist die Abbildung

$$\iota_j : \begin{array}{l} X_j \longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i \\ x \longmapsto (j, x) \end{array}$$

injektiv und induziert eine Bijektion

$$X_j \leftrightarrow \{(j, x) \mid x \in X_j\} \subseteq \coprod_{i \in I} X_i.$$

Damit ist insbesondere

$$\coprod_{i \in I} X_i = \coprod_{j \in I} \iota_j(X_j).$$

Beweis. Klar. □

Trivial Nonsense* 8.3. Bei $\coprod_{i \in I} X_i$ handelt es sich um das Koprodukt der X_i in **Set**.

Ein Koprodukt erfüllt die gleiche Universelle Eigenschaft, wenn man die Richtung aller Abbildungen umdreht, d.h. X ist Koprodukt der X_i in **Set** genau dann, wenn X Produkt der X_i in **Set**^{op} ist. Für eine genauere Formulierung vergleiche [Theorem 8.11](#).

Notation* 8.4. Ich bemühe mich, folgende Trennung in der Notation vorzunehmen:

- Das Zeichen \sqcup (eckige Vereinigung, `\sqcup`) steht zwar für eine disjunkte Vereinigung, allerdings soll es wie die normale Vereinigung behandelt werden und nur betonen, dass es sich um disjunkte Mengen handelt.
- Das Zeichen \coprod (Koprodukt, `\coprod`) steht für die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen, wie sie in [Definition 8.1](#) eingeführt wurde.

Ist z.B. U eine disjunkte Vereinigung von U_i , so schreibe ich $U = \sqcup_{i \in I} U_i$, was sowohl bedeuten soll, dass $U_i \subseteq U$, als auch $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Ist hingegen $U = \coprod_{i \in I} U_i$, so folgt weder $U_i \subseteq U$ (allerdings ist ι_j nach dem vorherigen Lemma eine entsprechende Einbettung, weswegen wir U_j oft mit dem entsprechenden Bild identifizieren), noch, dass $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Ist $\sqcup_{i \in I} U_i$ definiert (d.h. die U_i paarweise disjunkt), so ist jedoch in jedem Fall

$$\sqcup_{i \in I} U_i \cong \coprod_{i \in I} U_i.$$

weswegen eine saubere Trennung oft redundant oder nicht möglich ist.

Definition 8.5 (Disjunkte Vereinigung topologischer Räume). Sei $(X, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Wir versehen $\coprod_{i \in I} X_i$ mit der Topologie, die von $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ als Basis erzeugt wird. Den entstehenden Raum nennen wir das Koprodukt der topologischen Räume.

Bemerkung* 8.6. Eigentlich müssen wir die Topologie erstmal als Subbasis

von $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ erzeugen lassen, man überprüft jedoch mit **Theorem 6.7** leicht, dass es sich dann sogar um eine Basis handelt, was wir im Folgenden auch verwenden wollen.

Notationsmissbrauch 8.7. Eigentlich ist $\mathcal{O}_i \notin \mathcal{P}(\coprod_{i \in I} X_i)$ keine Familie von Teilmengen von $\coprod_{i \in I} X_i$, weswegen die Definition keinen Sinn macht. Mittels den Einbettungen $\iota_j : X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ können wir jedoch \mathcal{O}_j entsprechend auffassen. Man käme in Versuchung

$$\mathcal{O} := \bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{O}_i).$$

zu schreiben, doch eigentlich ist auch das falsch, weil wir ι_j nicht nur auf die Elemente von \mathcal{O}_j , sondern auf die Elemente der Elemente von \mathcal{O}_j anwenden wollen - nämlich auf die Elemente der offenen Teilmengen, die in \mathcal{O}_j spezifiziert waren. Im Folgenden wollen wir jedoch weiterhin $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ schreiben um obiges zu meinen, die Einbettungen ι_j sind in der Notation unterdrückt.

Warnung. Die Menge $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ ist im Allgemeinen keine Topologie. Z.B. ist

$$\coprod_{i \in I} X_i \notin \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i.$$

Lemma 8.8. Eine Menge $U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ ist offen, genau dann, wenn $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ offen ist für alle $j \in I$.

Beweis.* ' \implies ' Sei $U \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ offen, dann können wir $U = \bigcup_{k \in K} U_k$ schreiben, wobei $U_k \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ ein Element der (Sub-) Basis ist Dann ist

$$\iota_j^{-1}(U) = \iota_j^{-1} \left(\bigcup_{k \in K} U_k \right) = \bigcup_{k \in K} \iota_j^{-1}(U_k).$$

Nun ist aber $\iota_j^{-1}(U_k) = \emptyset$, wenn U_k aus einem \mathcal{O}_i mit $i \neq j$ stammt, und $\iota_j^{-1}(U_k) = U_k$ wenn U_k aus \mathcal{O}_i stammt, also in jedem Fall eine offene Teilmenge von X_j , und damit ist das Urbild offen.

' \impliedby ' Nimm umgekehrt an, dass $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ offen ist für alle $j \in I$. Es genügt wegen $\coprod_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{i \in I} \iota_i(X_i)$ festzustellen, dass

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap \iota_i(X_i)) = \bigcup_{i \in I} \iota_i(\iota_i^{-1}(U)).$$

und dies ist offen nach Annahme, da ι_i eine Einbettung ist. □

Bemerkung 8.9. Per Definition ist für jedes $j \in I$ die Menge $\iota(X_j) = \{(j, x) \mid x \in X_j\}$ offen in $\coprod_{i \in I} X_i$ und die von ι_j induzierte Abbildung

$$X_j \rightarrow \{(j, x) \mid x \in X_j\} \subseteq \coprod_{i \in I} X_i.$$

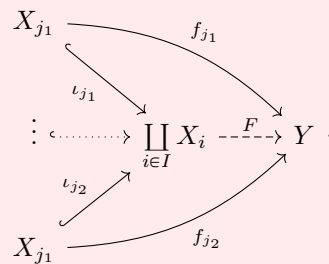
ist eine Einbettung. Die X_i können wir also kanonisch als Teilräume von $\coprod_{i \in I} X_i$ auffassen.

- Beispiel 8.10.**
1. Betrachte einen Kreis und einen Torus, die getrennt in \mathbb{R}^3 liegen. Die Unterraumtopologie auf dieser Menge ist die gleiche wie die Topologie der disjunkten Vereinigung.
 2. Auch wenn $[0, 1] \cup [\frac{1}{2}, 1] = [0, 1]$ ist die Koprodukttopologie auf $[0, 1] \sqcup [\frac{1}{2}, 1]$ nicht die Unterraumtopologie auf $[0, 1]$. (die beiden Räume sind schon als Mengen nicht gleich).

Satz 8.11 (Universelle Eigenschaft des Koprodukts). Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei Y ein topologischer Raum. Seien $f_j : X_j \rightarrow Y$ Abbildungen für alle $j \in I$. Definiere die Abbildung

$$F : \begin{cases} \coprod_{i \in I} X_i & \longrightarrow & Y \\ (j, x) & \longmapsto & f_j(x) \end{cases}$$

Dann ist F genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.



Beweis. f_j ist stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen, da $F \circ \iota_j = f_j$.
 ' \Leftarrow ' Sei nun f_j stetig für alle j . Sei $V \subseteq Y$ offen, dann müssen wir zeigen, dass $F^{-1}(V) \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ offen ist. Es ist nun aber

$$\iota_j^{-1}(F^{-1}(V)) = (F \circ \iota_j)^{-1}(V) = f_j^{-1}(V) \subseteq X_j.$$

offen in X_j , weil f_j stetig war. Nach Definition ist dann genau $F^{-1}(V)$ offen in $\coprod_{i \in I} X_i$. \square

Frage 8.12. Was ist, wenn die Vereinigung nicht disjunkt ist?

Sei X ein topologischer Raum und $X_1, X_2 \subseteq X$ Unterräume sowie $X_1 \cup X_2 = X$. Setze $X_0 := X_1 \cap X_2$. Wir wollen die Topologie auf X aus denen von X_0, X_1, X_2 rekonstruieren.

Beispiel 8.13. Falls $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, so können wir aus den Einbettungen $X_1 \hookrightarrow X$ und $X_2 \hookrightarrow X$ nach der Universellen Eigenschaft eine Abbildung $F : X_1 \coprod X_2 \rightarrow X$ induzieren, die stetig und bijektiv ist. Diese ist offen, genau dann, wenn X_1, X_2 offen in X sind (wie wir später sehen werden).

Beispiel 8.14. Sei $X = [0, 1]$, $X_1 = [0, \frac{1}{2}]$ und $X_2 = (\frac{1}{2}, 1]$, also $X = X_1 \sqcup X_2$. Allerdings ist $X_1 \coprod X_2 \neq X$, weil die Menge $[0, \frac{1}{2}]$ offen in $X_1 \coprod X_2$ ist, allerdings nicht in $[0, 1]$.

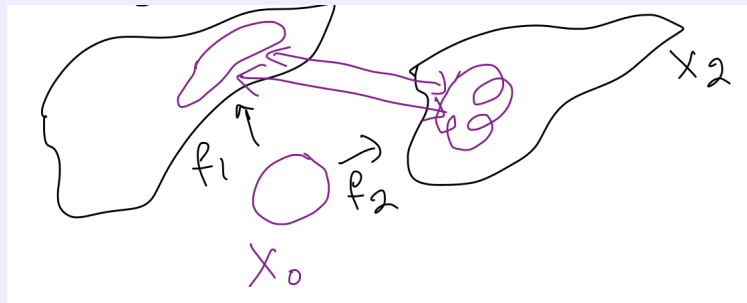
Bemerkung* 8.15. Man kann sich das wirklich bildlich so vorstellen, dass die disjunkte Vereinigung von $[0, \frac{1}{2}]$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ bedeutet 'lege sie mit Abstand nebeneinander auf den Zahlenstrahl'. Damit geht die 'Nähe' von $\frac{1}{2}$ zum Anfangsstück von $(\frac{1}{2}, 1]$ 'verloren'. In der Tat ist auch $[0, \frac{1}{2}] \coprod (\frac{1}{2}, 1] \cong [0, \frac{1}{2}] \cup (1, \frac{3}{2}]$ mit der Teilraumtopologie von \mathbb{R} .

Eine teilweise Antwort auf obige Frage gibt folgende Konstruktion:

Definition 8.16 (Disjunkte Vereinigung über einem Basisraum). Seien X_0, X_1, X_2 topologischen Räume und $f_1 : X_0 \rightarrow X_1$ sowie $f_2 : X_0 \rightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Definiere $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ als Quotient

$$X_1 \coprod X_2 / \sim .$$

wobei \sim erzeugt wird durch $f_1(x) \sim f_2(x)$ für alle $x \in X_0$.



Beispiel 8.17. Betrachte zwei Kopien von D^2 . Wir können S^1 jeweils kanonisch als Rand einbetten, dann erhalten wir

$$D^2 \bigcup_{S^1} D^2 \cong S^2 .$$

(Das ist noch kein Beweis, aber die Intuition ist klar - mehr dazu später).

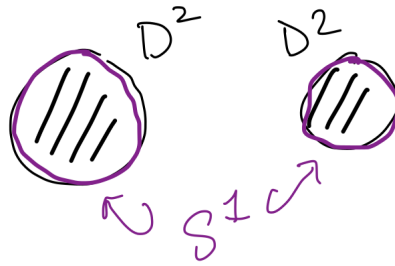
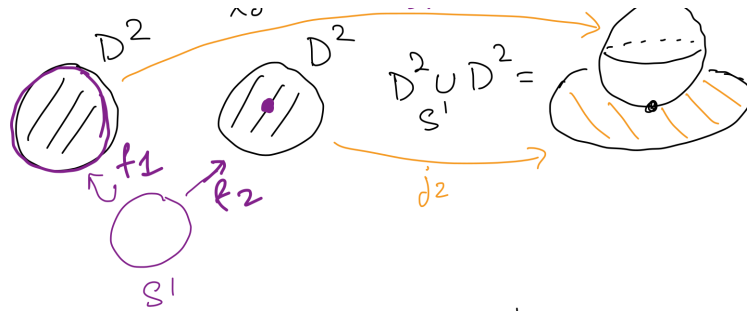


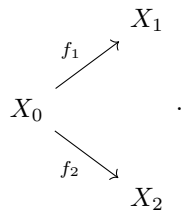
Abbildung 15: Disjunkte Vereinigung von D^2 und D^2 über S^1

Warnung. Der Raum $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ hängt von den Abbildungen f_1, f_2 ab. Dazu folgendes:

Beispiel 8.18. Betrachte wieder zwei Kopien von D^2 , biete $f_1 : S^1 \hookrightarrow D^2$ kanonisch ein, und bilde $f_2 : S^1 \rightarrow D^2$ konstant in den Mittelpunkt ab. Dann erhalten wir eine 'Kugel auf einem runden Tisch'



Trivial Nonsense* 8.19. Der Raum $X_1 \coprod X_2 / \sim$ ist der Limes (in **Top**) des folgenden Diagramms:



Beweis. Zunächst konstruieren wir Abbildungen $g_i : X_i \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$. g_1, g_2 können wir einfach als Komposition von $\iota_i : X_i \hookrightarrow X_1 \coprod X_2$ mit der kanonischen Projektion $p : X_1 \coprod X_2 \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$ definieren.

Behauptung 5. Es ist $p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$.

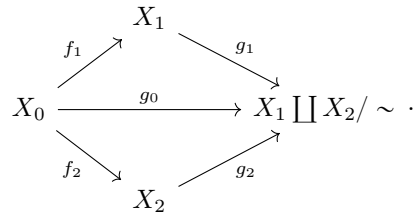
Unterbeweis. Nach Konstruktion ist für $x \in X_0$: $\iota_1(f_1(x_0)) \sim \iota_2(f_2(x_0))$ (die

Einbettungen hatten wir in der Definition von \sim unterdrückt), und nach Definition des Quotientenraumes schickt p die beiden also auf das gleiche Element. ■

Wir können nun $g_0 := p \circ \iota_1 \circ f_1 = p \circ \iota_2 \circ f_2$ definieren.

Warnung. Es ist $\iota_i \circ f_i \neq \iota_j \circ f_j$, so leicht ist unser Leben nicht!

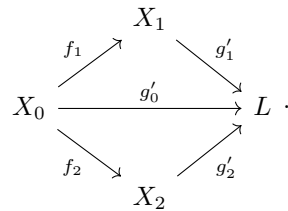
Wir müssen noch prüfen, dass für jeden Morphismus des Diagramms die entsprechenden Abbildung nach $X_1 \coprod X_2 / \sim$ kommutieren:



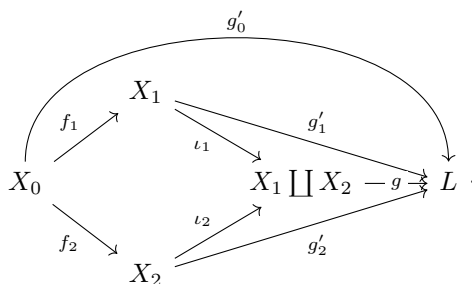
Das ist aber nach Konstruktion mit der Rechnung

$$g_1 \circ f_1 = g_1 \circ p \circ \iota_1 \circ f_1 \stackrel{\text{Behauptung 1}}{=} p \circ \iota_2 \circ f_2 = g_2 \circ f_2.$$

klar. Es bleibt zu zeigen, dass unser behaupteter Limes $X_1 \coprod X_2 / \sim$ universell ist. Sei also L ein weiterer topologischer Raum mit Abbildungen g'_0, g'_1, g'_2 , sodass



kommutiert, dann müssen wir zeigen, dass es genau eine Abbildung $f : L \rightarrow X_1 \coprod X_2 / \sim$ gibt, sodass $g'_i = f \circ g_i$. Zunächst haben wir mit der Universellen Eigenschaft des Koprodukt eine von g_1, g_2 induzierte Abbildung $g : X_1 \coprod X_2 \rightarrow L$, also ergibt sich folgende Situation:



Warnung. Auch in diesem Diagramm kommutiert das linke Quadrat nicht, d.h. $\iota_1 \circ f_1 \neq \iota_2 \circ f_2$.

Behauptung 6. g bildet äquivalente Elemente von $X_1 \coprod X_2$ auf gleiche Elemente in L ab.

Unterbeweis. Es genügt zu zeigen, dass $g(\iota_1(f_1(x))) = g(\iota_2(f_2(x)))$ für $x \in X_0$ beliebig, weil die Äquivalenzrelation hiervon erzeugt wird. Dazu ist

$$g \circ \iota_1 \circ f_1 = g'_1 \circ f_1 = g'_0 = g'_2 \circ f_2 = g \circ \iota_2 \circ f_2.$$

indem wir die Eigenschaften der induzierten Abbildung g und die des Limes L der Reihe nach anwenden. ■

Mit Behauptung 2 und der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie faktorisiert nun g über $X_1 \coprod X_2 / \sim$, also induziert g unsere gewünschte Abbildung $f : X_1 \coprod X_2 / \sim \rightarrow L$, sodass

$$\begin{array}{ccc} X_1 \coprod X_2 & \xrightarrow{g} & L \\ & \searrow p & \uparrow f \\ & & X_1 \coprod X_2 / \sim \end{array} .$$

kommutiert. Dann erhalten wir auch schnell $g'_1 = g \circ \iota_1 = f \circ p \circ \iota_1 = f \circ g_1$, analoges für g_2 , sowie $g'_0 = g'_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_1 = g_0$.

Es bleibt zu zeigen, dass die induzierte Abbildung f eindeutig ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie genügt es, zu zeigen, dass g eindeutig bestimmt. g ist aber nach der universellen Eigenschaft von $X_1 \coprod X_2$ eindeutig bestimmt. Also war f eindeutig.

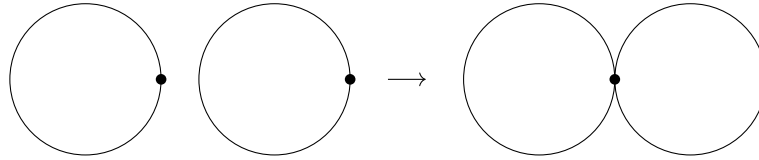
Damit haben wir überprüft, dass $X_1 \coprod X_2 / \sim$ alle Eigenschaften eines Limes erfüllt. □

Bemerkung* 8.20. Ja, der Beweis der Aussage ist sehr lang, dafür, dass er intuitiv klar ist, und das ist irgendwie typisch für Kategorientheorie. Ich hatte Lust, das mal ordentlich aufzuschreiben, aber normal verkürzt man den Beweis drastisch und verweist einfach die beiden anderen universellen Eigenschaften.

Beispiel 8.21. Ist $X_0 = \{\star\}$ ein Punkt, so ergibt sich

Definition 8.22 (Wedge-Produkt). Seien X, Y nichtleere topologische Räume, $x \in X$ und $y \in Y$. Bilde $f_1 : \{\star\} \rightarrow X, \star \mapsto x$ und analog für Y ab. Der entstehende Raum $X \bigcup_{\{\star\}} Y$ heißt **Einpunktvereinigung** oder auch **Wedge-Produkt** von X, Y und wird mit $X \vee Y$ notiert.

Beispiel 8.23. Sei $(X, x) = (S^1, 1)$ und $(Y, y) = (S^1, 1)$. Dann ist $X \vee Y$ ein **Bouquet von 2 Kreisen**.



Beispiel 8.24. Es ist $[0, \frac{1}{2}] \vee_{\frac{1}{2}} [\frac{1}{2}, 1] \cong [0, 1]$. Verkleben wir allerdings die Punkte $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, so erhalten wir nicht das Einheitsintervall, sondern ein Plus-Zeichen.

Bemerkung* 8.25. Aus anderen mathematischen Richtungen kennt man das Wort 'Wedge' eigentlich als Symbol \wedge . In der Topologie ist dies jedoch anders. Das Symbol \wedge heißt 'Smash' und definiert das Smash-Produkt zweier Räume:

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y.$$

Es ist z.B. $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$ und sogar allgemein $S^n \wedge S^n \cong S^{2n}$.

Definition 8.26 (Smash-Produkt). Seien X, Y topologische Räume und $x \in X, y \in Y$ Punkte. Dann ist das **Smash-Produkt** definiert als

$$(X, x) \wedge (Y, y) = X \times Y / (X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y).$$

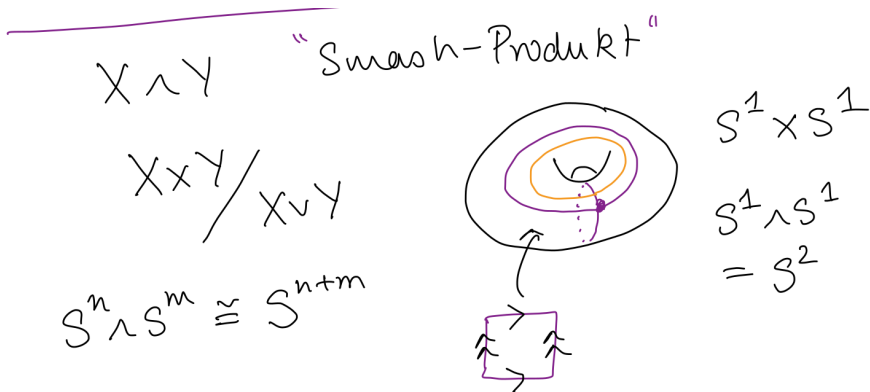


Abbildung 16: Entstehung des Torus als $S^1 \wedge S^1$

Bemerkung* 8.27. In der Pause stellte sich die Frage, ob es ein Beispiel für einen nicht-normalen Hausdorff-Raum gibt. Siehe hierzu [Lyn70, Gegenbeispiel

86].

Beispiel* 8.28 (Punktierte Tychonoff-Planke). Wir geben (nach einem Kommentar von MELVIN WEISS) ein Beispiel für einen Hausdorff-Raum, der nicht normal ist, die sogenannte **gelöschte Tychonoff-Planke** (eng: 'deleted Tychonoff plank'). Sei hierzu \aleph_0 die erste unendliche Kardinalzahl und \aleph_1 die erste überabzählbare Kardinalzahl. Auf den Räumen $[0, \aleph_0]$ und $[0, \aleph_1]$ können wir in natürlicher Weise eine Topologie definieren, indem wir die Anfangs- und Endstücke des Intervalls als Subbasis wählen. Der Raum

$$T := [0, \aleph_0] \times [0, \aleph_1].$$

heißt Tychonoff-Planke und ist ein kompakter Hausdorff-Raum, also insbesondere normal. Der Teilraum

$$T_{\text{deleted}} := T \setminus \{\infty\} := T \setminus \{(\aleph_0, \aleph_1)\}.$$

heißt punktierte Tychonoff-Planke und ist ein lokal kompakter Hausdorffraum, allerdings nicht normal.

Beweisskizze. Wir verweisen an dieser Stelle darauf, dass $[0, \alpha]$ für jede Ordinalzahl α ein kompakter Hausdorffraum ist, das ganze beruht im Wesentlichen darauf, dass die Ordinalzahlen eine Wohlordnung bilden. Also ist T als Produkt von kompakten Hausdorffräumen ebenfalls kompakter Hausdorffraum ([Theorem 7.32](#), [Theorem 7.28](#)), also normal ([Theorem 5.17](#)).

Der Teilraum T_{deleted} ist also als Teilraum eines Hausdorff-Raumes ebenfalls Hausdorff. Allerdings lassen sich die beiden abgeschlossenen Mengen

$$A := [0, \aleph_0] \times \{\aleph_1\}, \quad B := \{\aleph_0\} \times [0, \aleph_1].$$

nicht durch offene Mengen trennen:

Angenommen, wir finden $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ mit U, V offen. Sei $n \in \mathbb{N} = \aleph_0$ beliebig, dann ist $(n, \aleph_1) \in A \subseteq U$. Da U offen, finden wir ein Basiselement der Produkttopologie, das (n, \aleph_1) enthält, also gibt es $\alpha_n < \aleph_1$, sodass bereits das Intervall $\{n\} \times [\alpha_n, \aleph_1] \subseteq U$ ist (an dieser Stelle sollte man sich eigentlich genauer Fragen, wie die Topologie auf einer Ordinalzahl definiert ist, die Details, und warum die behauptete Aussage folgt, sind aber leicht zu überlegen). Jetzt kommt der Trick: Wir betrachten

$$\beta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

Behauptung 7. $\beta < \aleph_1$

Unterbeweis. Es ist $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ (nach Konstruktion der Ordinalzahlen) wieder eine Ordinalzahl. Da $\alpha_n < \aleph_1$ ist α_n (als Menge) abzählbar, und somit auch β als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen, also ist auch $\beta < \aleph_1$, weil \aleph_1 überabzählbar ist. ■

Jetzt wissen wir also, dass sogar der Streifen $[0, \aleph_0) \times [\beta, \aleph_1] \subseteq U$ ist (nach Wahl der α_n), d.h. die Menge U enthält sogar ein 'Rechteck positiver Höhe', was absurd ist. Formal können wir argumentieren, indem wir jetzt für den Punkt $(\aleph_0, \beta) \in B$ eine offene Umgebung wählen und somit ein Intervall $[\gamma, \aleph_0) \times \{\beta\} \subseteq V$ mit $\gamma < \aleph_0$ finden. Dann ist jedoch $(\gamma, \beta) \in U \cap V$, \nexists . □

Das absurde an dem Beispiel ist, dass wir das Supremum der α_n nehmen, die zwar alle $< \aleph_1$ sind, aber dennoch $\beta \neq \aleph_1$ folgt. Von den reellen Zahlen sind wir gewohnt, dass hier Gleichheit eintreten kann. Wir haben also sogar gezeigt, dass

Behauptung 8. Im Raum $[0, \aleph_1)$ konvergiert jede monoton steigende Folge.

obwohl der Raum nach oben keine Schranke besitzt. Die Moral daran ist ungefähr 'aleph_1 ist zu groß, um von Folgen erreicht zu werden'. Das motiviert auch die Einführung von Netzen für größere topologische Räume, die wir hier aber nicht behandeln.

Wir haben nun Abbildungen $j_i: X_i \rightarrow X_1 \bigsqcup_{X_0} X_2$:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \bigsqcup X_2 \\ & \searrow j_1 & \downarrow q \\ & & X_1 \bigsqcup_{X_0} X_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\iota_2} & X_1 \bigsqcup X_2 \\ & \searrow j_2 & \downarrow q \\ & & X_2 \bigsqcup_{X_0} X_1 \end{array} .$$

Lemma 8.29. Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume, $f_1: X_0 \rightarrow X_1, f_2: X_0 \rightarrow X_2$ stetig und betrachte die kanonischen Abbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow X_1 \bigsqcup X_2$ sowie $q: X_1 \bigsqcup X_2 \rightarrow X_1 \bigsqcup_{X_0} X_2$.

Ist f_1 injektiv so ist j_2 injektiv. Ist f_2 injektiv, so ist j_1 injektiv.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die zweite folgt aus Symmetriegründen. Seien $x, y \in X_2$ mit $j_2(x) = j_2(y)$, nach Konstruktion ist also $x \sim y$. Da die Äquivalenzrelation erzeugt ist von $f_1(x) \sim f_2(x)$, gibt es nun eine Folge von Punkten $x := p_1 \sim p_2 \sim \dots \sim p_n =: y$, die jeweils von der Form $f_1(x) \sim f_2(x)$ sind.

Erzeugen wir eine Äquivalenzrelation durch $x_i \sim y_i$ für $i \in I$, so sind zwei Element x, y genau dann äquivalent, wenn es eine endliche Folge $x = a_0 \sim a_1 \sim \dots \sim a_n = y$ gibt, wobei $\{a_i, a_{i+1}\} = \{x_i, y_i\}$ für ein $i \in I$.

Genauer gibt es also $x_1 \in X_0$ mit $f_2(x_1) = p_1 = x$ und $f_1(x_1) = p_2$, und $\exists x_2 \in X_0$ mit $f_2(x_2) = p_3$ sowie $f_1(x_2) = p_2$ (auf welcher Seite f_1 bzw. f_2 steht, ergibt sich daraus,

dass die Punkte p_i alternierend aus X_1, X_2 kommen müssen). Allgemein gibt es also $x_i \in X_0$ mit

$$f_2(x_{2i-1}) = p_{2i-1}, \quad f_1(x_{2i-1} = p_{2i}), \quad f_2(x_{2i} = p_{2i+1}), \quad f_1(x_{2i}) = p_{2i}$$

Nun wissen wir aber, dass f_1 injektiv ist, also ergibt sich $x_{2i-1} = x_{2i}$. Dann ist bereits:

$$x = f_2(x_1) = f_2(x_2) = p_3 = f_2(x_3) = f_2(x_4) = p_5 = \dots = y.$$

und damit haben wir $x = y$ gezeigt und j_2 ist wie gewünscht injektiv.

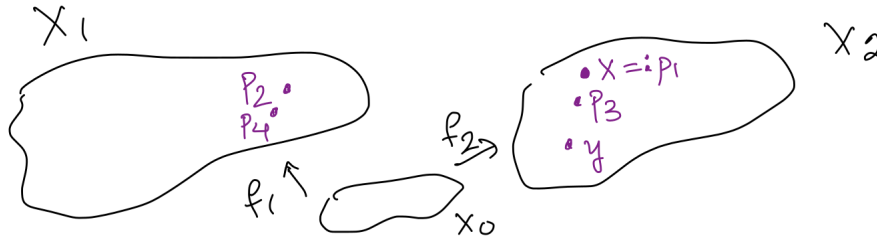


Abbildung 17: Beweisskizze zu Lemma 8.29

□

Wir kehren nun zu unserer Ausgangssituation bzw. Ausgangsfrage zurück:

Sei X ein topologischer Raum und seien $X_1, X_2 \subseteq X$ Unterräume, sodass $X_1 \cup X_2 = X$. Setze $X_0 := X_1 \cap X_2$.

Betrachte

$$f' : \begin{cases} X_1 \amalg X_2 & \longrightarrow X \\ (1, x) & \longmapsto x \\ (2, x) & \longmapsto x \end{cases}$$

(im Wesentlichen ist das die Projektion, sodass wir das 'disjunkt' aus der Vereinigung wieder loswerden). Dann faktorisiert f' nach der Universellen Eigenschaft der Quotiententopologie über $f : X_1 \cup_{X_0} X_2 \rightarrow X$, dh wir erhalten:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \amalg X_2 & \xrightarrow{f'} & X \\ q \downarrow & \nearrow f & \\ X_1 \cup_{X_0} X_2 & & \end{array}$$

Es ist f' surjektiv wegen $X_1 \cup X_2 = X$, also auch f , und wir prüfen auch leicht die Injektivität von f . Nun ist:

Satz 8.30. Betrachte die Konstruktion von eben. Nimm an, dass zusätzlich eine der Bedingungen

1. X_1, X_2 sind offen.
2. X_1, X_2 sind abgeschlossen.

gilt. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur unter Verwendung von 2., der Fall 1. geht analog. Es genügt zu zeigen, dass f abgeschlossen ist (weil wir schon wissen, dass f eine stetige Bijektion ist). Sei $A \subseteq X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ abgeschlossen. Dann sind $j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$ und $j_2^{-1}(A) \subseteq X_2$ abgeschlossen, da j_1, j_2 stetig. Wegen

$$f(A) = j_1^{-1}(A) \cup j_2^{-1}(A).$$

sind wir fertig, indem wir ($j_1^{-1}(A) \subseteq X_1$ abgeschlossen und $X_1 \subseteq X$ abgeschlossen) $\implies j_1^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen bemerken. \square

Bemerkung* 8.31. Die Stetigkeit von f^{-1} kann man auch mit [Aufgabe 2.2](#) einsehen, weil $X = X_1 \cup X_2$ mit X_1, X_2 abgeschlossen ist, und die entsprechenden Teilabbildungen $X_1 \rightarrow X_1 \bigcup_{X_0} X_2$ Einbettungen sind. Im Wesentlichen wiederholen wir hier einfach nur die Aussage des Übungsblattes.

Beispiel 8.32. Sei $X = S^n$ und betrachte die Teilräume

$$X_1 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \quad X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} \leq 0\}$$

, also die obere und untere Halbkugel. Der Schnitt

$$X_0 := X_1 \cap X_2 = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$

ist dann genau der Äquator der Kugel, also lernen wir aus [Theorem 8.30](#), dass

$$S^n \cong X_1 \bigcup_{X_0} X_2.$$

Mit der Abbildung

$$\begin{aligned} X_1 &\longrightarrow D^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(die Projektion auf die n -Dimensionale Scheibe) erhalten wir einen Homöomorphismus $D^n \cong X_1, X_2$, also haben wir eigentlich sogar

$$S^n \cong D^n \bigcup_{S^{n-1}} D^n.$$

gezeigt.

Warnung. Auch hier ist wieder wichtig, dass wir $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ jeweils kanonisch einbetten, für andere Abbildungen haben wir bereits gesehen, dass wir andere Räume erhalten können.

9 Zusammenhang, Wegzusammenhang

Definition 9.1 (Zusammenhang). Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegen lässt.

Lemma 9.2 (Offen-abgeschlossene-Mengen). Ein Raum ist zusammenhängend, wenn die leere Menge und der gesamte Raum die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen sind, d.h.

$$\nexists A \subseteq X, A \neq \emptyset, X: \quad A \text{ offen und abgeschlossen.}$$

*Beweis**. Gibt es eine offene, abgeschlossene Menge $A \neq \emptyset, X$, so ist $X = A \sqcup A^c$ eine Zerlegung in offene, disjunkte Mengen. Ist umgekehrt $X = U_1 \cup U_2$ mit U_1, U_2 offen, disjunkt und nichtleer, also auch nicht X , so sind U_1, U_2 beides offen abgeschlossene Mengen. \square

Bemerkung 9.3. X ist nicht zusammenhängend, genau dann, wenn $X \cong X_1 \coprod X_2$ eine disjunkte Vereinigung von 2 Räumen $X_1, X_2 \neq \emptyset$ ist.

Beispiel 9.4. 1) $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ und $(-\infty, 0), (0, \infty)$ sind offen, disjunkt und nicht leer, also ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht zusammenhängend.

2) Betrachte $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit der Unterraumtopologie. Dann ist

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)).$$

eine Zerlegung in offene, disjunkte, nichtleere Mengen, also ist auch \mathbb{Q} nicht zusammenhängend.

Bemerkung* 9.5. Es ist meistens einfacher, zu zeigen, dass ein Raum nicht zusammenhängend ist, die Gegenrichtung erweist sich als schwerer. Deswegen folgender

Satz 9.6 (Einheitsintervall). Das Intervall $[0, 1]$ ist zusammenhängend.

Beweis. Nimm gegenteilig an, dass $[0, 1]$ nicht zusammenhängend ist, schreibe also $[0, 1] = A \cup B$ mit $A, B \neq \emptyset$, offen und disjunkt. OBdA sei $0 \in A$. Wegen $B \neq \emptyset$ gibt es $t := \inf B$. Da t abgeschlossen (weil A offen!), ist $t \in B$, also folgt $[0, t) \subseteq A$. Aber jede Umgebung von $t \in B$ schneidet $[0, t)$, also A , \nearrow , weil $A \cap B = \emptyset$. \square

Definition 9.7 (Weg). Sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Ein **Weg** von x nach y ist eine stetige Funktion $w : [0, 1] \rightarrow X$, sodass $w(0) = x$ und

$$w(1) = y.$$

Definition 9.8 (Wegzusammenhang). Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein **Weg** von x nach y existiert.

Beispiel 9.9. 1) Die Mengen $(a, b), [a, b), (a, b]$ und \mathbb{R} sind alle wegzusammenhängend. Definiere hierzu

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto ty + (1 - t)x \end{cases}$$

Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist t stetig, und wir sehen leicht, dass $0 \mapsto x, 1 \mapsto y$.

2) $\mathbb{R}^n, n \geq 0$ ist wegzusammenhängend. Dazu betrachte vorherige Abbildung auf den einzelnen Komponenten

3) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \geq 2$ ist wegzusammenhängend. Seien hierzu $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Fall 1: Die Strecke von x nach y liegt in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann betrachten wir wieder die Abbildung aus 1) und sind fertig.

Fall 2: Die Strecke trifft die 0. Wähle dann einen dritten Punkt z , der nicht auf der Geraden durch x, y liegt. Dann gibt es einen Weg von x nach z und einen von z nach y , und die Vereinigung der beiden Wege ist dann ein Weg von x nach y .

Bemerkung* 9.10. Wir verwenden natürlich entscheidend, dass $ty + (1 - t)x \in (a, b), [a, b), (a, b], \mathbb{R}$ für beliebige x, y , die auch in einer der Mengen liegen (Das ist Teil der Definition eines Weges!).

Bemerkung* 9.11. Ebenfalls kann man sich kurz Überlegen, dass die Vereinigung von zwei Wegen wieder ein Weg ist. Seien hierzu w_1, w_2 Wege von x nach y bzw. von y nach z . Dann definieren wir

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow X \\ x & \longmapsto \begin{cases} w_1(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ w_2(2x - 1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

so sehen wir leicht $w(0) = w_1(0) = x, w(1) = w_2(2 \cdot 1 - 1) = w_2(1) = z$, und w ist stetig, weil f auf $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$ stetig ist und bei $\frac{1}{2}$ beide Definitionen wegen $w_1(1) = y = w_2(0) = w_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ übereinstimmen.

Lemma 9.12. Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.

Warnung. Die Umkehrung von Lemma 9.12 gilt im Allgemeinen nicht. Vergleiche hierzu Aufgabe 5.1.

Beweis von Lemma 9.12. Sei X wegzusammenhängend, und nimm gegenteilig an, dass $X = U_1 \sqcup U_2$ mit $U_i \subseteq X$ offen und disjunkt. Sei $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$. Dann gibt es einen Weg w von x_1 nach x_2 , und wir erhalten

$$w^{-1}(U_1) \cup w^{-1}(U_2) = w^{-1}(U_1 \cup U_2) = [0, 1].$$

Allerdings sind $w^{-1}(U_i)$ offen (w ist stetig), disjunkt (U_1, U_2 sind disjunkt) und nicht leer ($0 \in w^{-1}(U_1), 1 \in w^{-1}(U_2)$), also ist $[0, 1]$ nicht zusammenhängend. ⚡ mit Theorem 9.6. \square

Korollar 9.13. \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 sind nicht homöomorph.

Beweis. Nimm an, es gibt einen solchen Homöomorphismus

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto f(0) \end{cases}$$

Dann induziert f auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$, allerdings ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend, und $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ nicht, ⚡. \square

Frage 9.14. Sind $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ homöomorph?

Antwort. Nein, das gilt natürlich genau dann, wenn $n = m$. Allerdings warten wir mit einem solchen Beweis bis zur algebraischen Topologie. Siehe hierzu auch den Satz zur 'Invariance of domain' von Brouwer (den wir hier aber erstmal nicht behandeln).

Satz* 9.15 (Invariance of domain). Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig. Dann ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und f ist ein Homöomorphismus $f : U \cong f(U)$.

Korollar* 9.16. $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ für $n \neq m$.

Ein Versuch für einen ähnlichen Beweis wie $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^2$ scheitert, weil $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{f(0)\}$ beide (weg)zusammenhängend sind. Man könnte nun Versuchen, eine Gerade oder einen Kreis von \mathbb{R}^2 zu entfernen, der entsprechende Raum ist dann unzusammenhängend. Es erscheint auch klar, dass $\mathbb{R}^3 \setminus f(\text{Kreis} / \text{Gerade})$ zusammenhängend ist, allerdings ist ein entsprechender Beweis verhältnismäßig schwer. Die algebraische Topologie wird es uns ermöglichen, das wesentlich einfacher einzusehen.

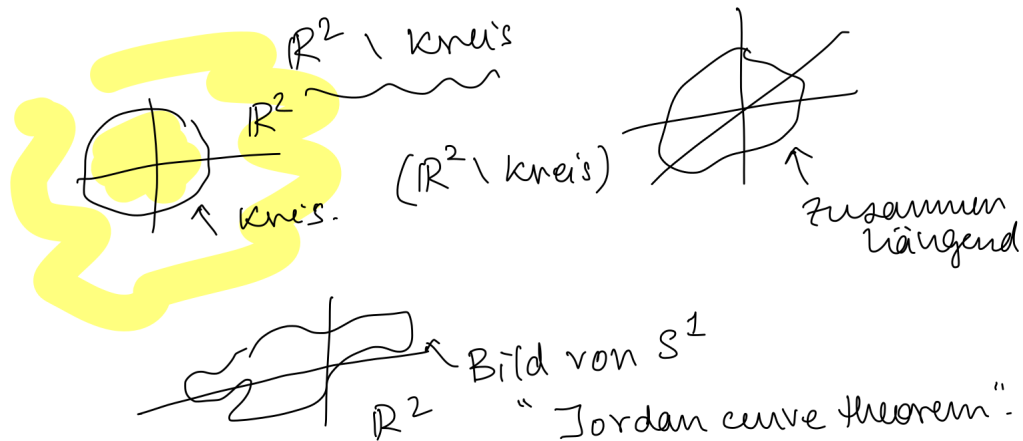


Abbildung 18: Skizze einer Jordankurve in \mathbb{R}^2

Bemerkung* 9.17. Die Frage, ob eine Schleife in \mathbb{R}^2 (ein stetiges, injektives Bild von S^1 in \mathbb{R}^2) den Raum in zwei Teile zerteilt, ist auch schwerer als man denkt, hierzu vergleiche den

Satz* 9.18 (Jordan'scher Kurvensatz). Es sei C eine Jordankurve in \mathbb{R}^2 , d.h. das Bild einer injektiven stetigen Abbildung $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus genau 2 Komponenten, eine davon ist beschränkt (die Innere), eine unbeschränkt (die Äußere)

Der Beweis verwendet aber auch Methoden aus der algebraischen Geometrie.

Lemma 9.19 (Bilder von zusammenhängenden Räumen). Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv.

- 1) Ist X wegzusammenhängend, so ist Y wegzusammenhängend.
- 2) Ist X zusammenhängend, so ist Y zusammenhängend.

Beweis. 1) Seien $y_1, y_2 \in Y$ beliebig. Da f surjektiv ist, finden wir $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Nun finden wir wegen Wegzusammenhang von X einen Weg $w : [0, 1] \rightarrow X$ mit $w(0) = x_1$ und $w(1) = x_2$. Dann ist die Verknüpfung

$$f \circ w : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow Y \\ 0 & \mapsto f(x_1) = y_1 \\ 1 & \mapsto f(x_2) = y_2 \end{cases}$$

ein Weg von y_1 nach y_2 , also ist Y wegzusammenhängend.

- 2) Nimm an, dass Y nicht zusammenhängend ist, also gibt es $U_1, U_2 \neq \emptyset$ offen und disjunkt mit $Y = U_1 \cup U_2$. Dann ist auch

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2).$$

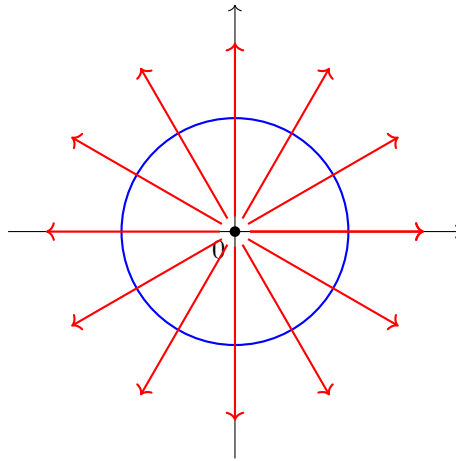
und $f^{-1}(U_i)$ sind offen, disjunkt und nichtleer, weil f surjektiv ist. Also ist X nicht zusammenhängend, ∇ .

□

Beispiel 9.20. Die Sphäre S^n , $n \geq 1$ ist wegzusammenhängend. Hierzu stellen wir fest, dass

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{Projektion}} S^{n-1}.$$

und wir wissen schon, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist, also auch S^{n-1} .



Bemerkung* 9.21. Der kanonische Isomorphismus ist erstmal $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$, indem wir $x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|_2}, \|x\|_2\right)$ abbilden. Allerdings ist $\mathbb{R} \cong (0, \infty)$, z.B. mit der Exponentialabbildung.

Beispiel 9.22 (Auf Nachfrage in der Vorlesungspause besprochen). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für $x, y \in X$ auch die Verbindungsstrecke in X liegt, d.h. für $\lambda \in [0, 1]$ ist auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$. Eine Teilmenge heißt **sternförmig**, wenn es ein $x_0 \in X$ gibt, sodass für jedes $y \in X$ die Verbindungsstrecke von x_0 nach y in X liegt.

Dann sehen wir, dass

$$X \text{ konvex} \implies X \text{ sternförmig} \implies X \text{ wegzusammenhängend}.$$

Die erste Implikation ist trivial, wähle $x_0 \in X$ beliebig, für die zweite bilden wir $[0, 1]$ einfach auf die Verbindungsstrecke von x_0 nach y ab, dann sind alle Punkte mit x_0 verbunden, und deren Hintereinanderschalten ergibt Wege von x nach y für x, y beliebig.

Im Wesentlichen ist das das gleiche Argument, dass wir auch schon für die Intervalle in \mathbb{R} benutzt haben.

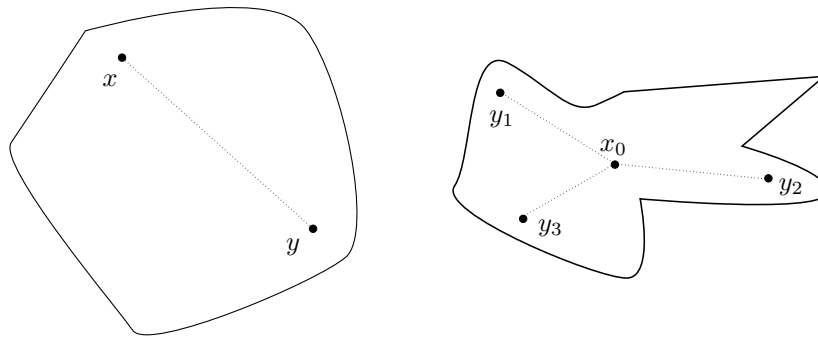
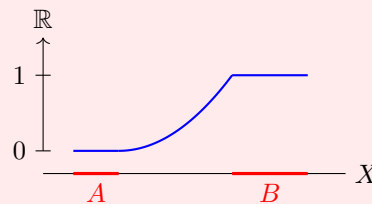


Abbildung 19: Links: eine konvexe Menge. Rechts: eine sternförmige, nicht-konvexe Menge

10 Lemma von Urysohn

Bemerkung 10.1. In der Vorlesung wurde auch folgendes angemerkt: Im gesamten nächsten Kapitel können wir für die Definition eines normalen Raums die Hausdorff-Eigenschaft fallen lassen. Alle Aussagen gelten weiterhin. Beachte aber, dass wir dann mit Urysohn nicht zwingend zwei Punkte trennen können, weil diese nicht zwingend abgeschlossen sind.

Satz 10.2 (Lemma von Urysohn). Sei X ein normaler topologischer Raum. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]$, sodass $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.



Lemma 10.3. Sei X ein topologischer Raum, sodass für jedes $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ offene $V_r \subseteq X$, sodass $r < r' \implies \overline{V_r} \subseteq V_{r'}$. Dann existiert eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow [0, 1]$, sodass $f(x) = 0$ für $x \in V_0$ und $f(x) = 1$ für $x \notin V_1$.

Beweis. Definiere

$$f : \begin{cases} X & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & x \notin V_1 \\ \inf \{r \mid x \in V_r\} & x \in V_1 \end{cases} \end{cases}$$

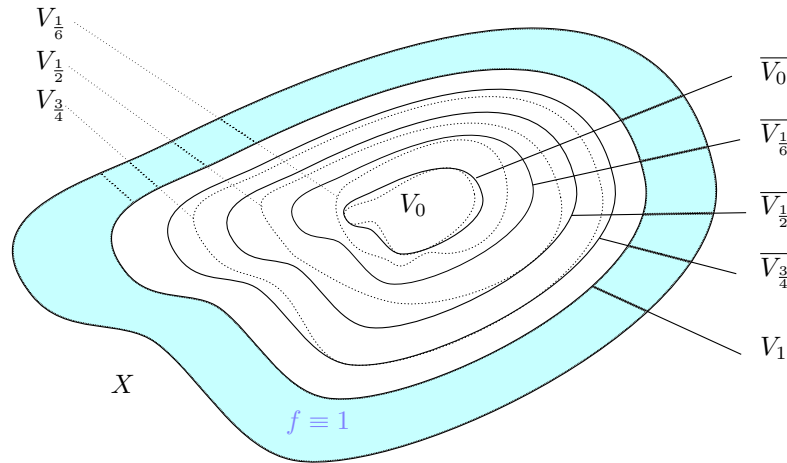


Abbildung 20: f wird durch die Familie der Mengen V_i 'approximiert'

Die Eigenschaften $f|_{V_0} \equiv 0$ und $f|_{X \setminus V_1} \equiv 1$ sind sofort klar. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Da

$$\mathcal{S} := \{[0, a) \mid a \in [0, 1]\} \cup \{(a, 1] \mid a \in [0, 1]\}.$$

eine Subbasis der Topologie auf $[0, 1]$ ist, genügt es, Stetigkeit auf \mathcal{S} zu prüfen. Sei

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([0, a)) &\iff f(x) < a \leq 1 \\ &\stackrel{\text{Def von } f}{\iff} \inf \{r \mid x \in V_r\} < a \\ &\stackrel{\mathbb{Q} \text{ ist dicht}}{\iff} \exists r < a, r \in \mathbb{Q} : x \in V_r \\ &\iff x \in \bigcup_{r < a} V_r \end{aligned}$$

Für den zweiten Typ von Basiselementen ist

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}((a, 1]) &\iff \begin{cases} x \notin V_1 \\ x \in V_1, a < f(x) = \inf \{r \mid x \in V_r\} \end{cases} \quad \text{oder} \\ &\iff \exists r' > a, r' \in \mathbb{Q}, x \notin V_{r'} \\ &\stackrel{\overline{V_r} \subseteq V_{r'}}{\iff} \exists r \in \mathbb{Q}, a < r < r', x \notin \overline{V_r} \\ &\iff x \in \bigcup_{r > a} (X \setminus \overline{V_r}) \end{aligned}$$

also ist auch $f^{-1}((a, 1])$ eine Vereinigung von offenen Mengen.

Also ist f stetig, wie zu zeigen war. \square

Bemerkung* 10.4. Wir können uns die V_r wie eine Art 'Höhenprofil' oder 'Höhenlinien' vorstellen, die wir in unserem Raum gegeben haben.

Wir erinnern uns daran, dass wir gerade dabei waren, **Theorem 10.2** zu beweisen.

Lemma 10.5. Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $U \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U$. Dann existiert $V \subseteq X$ offen mit

$$A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U.$$

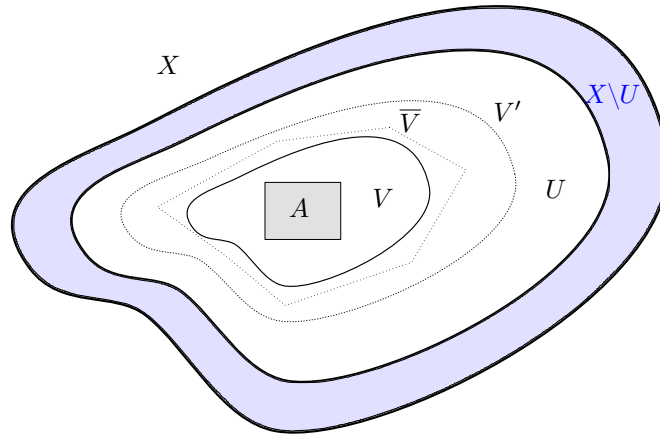


Abbildung 21: Skizze zu Lemma 10.5

Beweis. Wegen U offen ist $X \setminus U$ abgeschlossen. Wegen X normal gibt es V, V' offen mit $A \subseteq V$ und $(X \setminus U) \subseteq V'$ mit $V \cap V' = \emptyset$. Nun ist

$$A \subseteq V \subseteq X \setminus V' \subseteq U.$$

nach Definition des Abschlusses ist nun $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus V' \subseteq U$. □

Beweis von Theorem 10.2 (Lemma von Urysohn).

Ziel. $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ konstruiere $V_r \subseteq X$ offen, sodass

1. $A \subseteq V_0$
2. $B \subseteq X \setminus V_1$
3. $r < r' \implies \bar{V}_r \subseteq V_{r'}$

Dies genügt, denn dann wissen wir mit Lemma 10.3, dass

$$\begin{aligned} \exists f : X &\rightarrow [0, 1] \text{ stetig} \\ f(x) &= 0 \quad \forall x \in V_0 \supseteq A \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in X \setminus V_1 \supseteq B \end{aligned}$$

Wähle hierzu eine Abzählung p_1, p_2, \dots von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sodass $p_1 = 1$ und $p_2 = 0$. Definiere nun $\{V_r\}$ rekursiv, wobei wir auch induktiv die Invariante erhalten wollen, dass $r < r' \implies \bar{V}_r \subseteq V_{r'}$.

- $p_1 = 1$. Setze $V_1 := X \setminus B$ (offen, weil B abgeschlossen ist)
- $p_2 = 0$. Nach **Lemma 10.5** mit $A = A$ und $U = X \setminus B$ finden wir V_0 offen mit

$$A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq X \setminus B =: V_1.$$

- Sei $n \geq 3$, dann sind also $V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_{n-1}}$ schon definiert. Es ist $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ wohlgeordnet, weil es sich um eine endliche Menge handelt, also gibt es unter ihnen einen direkten Vorgänger p_i von p_n , und einen direkten Nachfolger p_j von p_n .

Es könnte z.B. $n = 5$ sein mit

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{5}$

Dann ist die Menge als $\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}, 1\}$ geordnet, und wir sehen $p_i = \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{9} = p_j$.

Verwende nun **Lemma 10.5** mit $A = \overline{V_{p_i}}$ und $U = V_{p_j}$, (hier ist wichtig, dass wegen $p_i < p_j$ bereits $\overline{V_{p_i}} \subseteq V_{p_j}$ gilt, sonst können wir das Lemma nicht anwenden.)

Also finden wir V mit $\overline{V_{p_i}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{p_j}$. Man prüft leicht, dass wir so auch die Invariante der Induktion erhalten haben.

Also haben wir wie gewünscht die V_i gefunden, und somit unsere Funktion. □

Korollar 10.6 (Urysohn mit beliebigem Intervall). Sei X ein normaler Raum und seien $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen, sowie $a \leq b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann

$$\begin{aligned} \exists f : X &\rightarrow [a, b] \\ f(A) &= \{a\} \\ f(B) &= \{b\} \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst verwenden wir Urysohn, um eine stetige Funktion $g : X \rightarrow [0, 1]$ zu erhalten mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$, dann verknüpfen wir mit der stetigen Abbildung

$$h : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & [a, b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{cases}$$

und wir erhalten sofort die gewünschten Eigenschaften, indem wir $f = h \circ g$ setzen. □

11 Der Erweiterungssatz von Tietze

Wir sehen jetzt das **Lemma von Urysohn** in Action:

Satz 11.1 (Erweiterungssatz von Tietze). Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$

abgeschlossen. Jede stetige Funktion $f : A \rightarrow [-1, 1]$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$, d.h. $\bar{f}|_A \equiv f$.

Bemerkung 11.2. Das Urysohn'sche Lemma ist ein Spezialfall des **Erweiterungssatz von Tietze**:

Sei X normal und $B, C \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt. Dann betrachte die Funktion

$$f : \begin{cases} B \cup C & \longrightarrow & [-1, 1] \\ B & \longmapsto & -1 \\ C & \longmapsto & 1 \end{cases}$$

Frage 11.3. Gibt es eine Fortsetzung $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$?

Für jede solche Fortsetzung muss auch $\bar{f}|_B = f$, also $\bar{f}(B) = -1$ und $\bar{f}(C) = 1$ gelten, also genau das, was wir von Urysohn fordern.

Allerdings sagt uns der **Erweiterungssatz von Tietze** genau, dass wir solche eine Fortsetzung finden.

Beweis von Theorem 11.1 (Erweiterungssatz von Tietze).

Beweisstrategie. Wir konstruieren eine Folge stetiger Funktionen $\{s_n : X \rightarrow [-1, 1]\}_{n \geq 1}$, sodass

- (i) $\{s_n\}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $s : X \rightarrow [-1, 1]$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall x \in X, n \geq N: \quad d(s_n(x), s(x)) < \varepsilon.$$

Weil $\{s_n\}$ gleichmäßig konvergiert, ist s stetig (nach **Aufgabe 5.3**,(iv)).

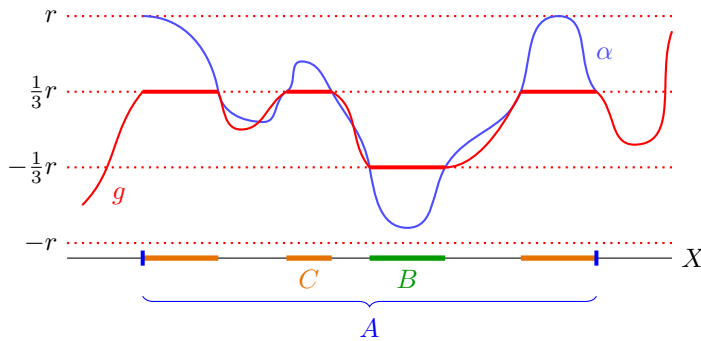
- (ii) $s|_A = f$

Dazu benötigen wir erstmal einige Lemmata, die wir im folgenden erarbeiten. □

Lemma 11.4. Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $\alpha : A \rightarrow [-r, r]$ für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann existiert $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$ stetig mit $|\alpha(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$ für $a \in A$.

Beweis. Setze $B := \alpha^{-1}([-r, -\frac{1}{3}r])$ und $C := \alpha^{-1}([\frac{1}{3}r, r])$. Wegen α stetig sind B, C abgeschlossen, und sie sind auch disjunkt, weil die Intervalle disjunkt sind. Nach **Urysohn mit beliebigem Intervall** finden wir also eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r \right] \\ g(B) &= \left\{ -\frac{1}{3}r \right\} \\ g(C) &= \left\{ \frac{1}{3}r \right\} \end{aligned}$$



Behauptung 9. g erfüllt die Bedingungen unseres Lemmas, d.h.

$$|\alpha(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r \quad \forall a \in A.$$

Unterbeweis. • Sei $a \in B$, Dann ist $\alpha(a) \in [-r, -\frac{1}{3}r]$ und $g(a) = -\frac{1}{3}r$, also gilt die Ungleichung.

• Sei $a \in C$. Dann ist $\alpha(a) \in [\frac{1}{3}r, r]$ und $g(a) = \frac{1}{3}r$, also, also gilt die Ungleichung.

• Sei $a \in A \setminus (B \cup C)$. Dann ist $\alpha(a), g(a) \in [-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r]$, und damit ist der Abstand auch höchstens $\frac{2}{3}r$.

■

□

Bemerkung* 11.5. In der Vorlesung kam die Frage auf, ob wir manche der gerade bewiesenen Resultate auch auf die Analysis übertragen können, indem wir z.B. den Fixpunktsatz von Banach anwenden.

Fortsetzung des Beweises des Erweiterungssatz von Tietze. Definiere die Folgen s_n induktiv. Dazu

Schritt 1: Verwende **Lemma 11.4** mit $\alpha = f$ und $r = 1$, also erhalten wir

$$g_1 : X \rightarrow \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r \right].$$

stetig mit $|f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}$ für jedes $a \in A$. Setze $s_1 = g_1$.

Induktionsschritt Angenommen, wir haben schon stetige Funktion g_1, \dots, g_n auf X mit

$$g_i : X \rightarrow \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \right].$$

und

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall a \in A.$$

Verwende nun wieder **Lemma 11.4** mit $\alpha = f - \sum_{i=1}^n g_i|_A$ und $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Es gibt also

$$g_{n+1}: X \rightarrow \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) - g_{n+1}(a) \right| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(a) \right| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Nun definiere

$$s_{n+1} := \sum_{i=1}^{n+1} g_i : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Behauptung 10. s_n hat Bild in $[-1, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Unterbeweis.

$$\begin{aligned} |s_n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^n |g_i(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Die andere Schranke zeigt man völlig analog. ■

Behauptung 11. Die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen s .

Unterbeweis. Für $k > n$ ist

$$\begin{aligned} |s_k(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^k g_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

- (i) Für jedes $x \in X$ ist $\{s_n(x)\}_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie zu einem Punkt $s(x) \in [-1, 1]$.
- (ii) Intuitiv reicht es für gleichmäßige Stetigkeit schon zu sehen, dass in obiger Abschätzung kein x vorkommt. Genauer:
 Sei $\varepsilon > 0$, so $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N \implies \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) - s_n(x) \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |s_k(x) - s_n(x)| \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

also ist die Konvergenz gleichmäßig, und s ist stetig. ■

Setze nun $\bar{f} := s$, dann überprüfen wir

Behauptung 12. \bar{f} ist eine Fortsetzung von f , d.h. $\bar{f}|_A = f$.

Unterbeweis. Es ist

$$|f(a) - s_n(a)| = \left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a) - s_n(a)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Also ist

$$s(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(a) = f(a).$$

für jedes $a \in A$. ■

Wir haben also eine Fortsetzung gefunden, und sind damit fertig. □

Korollar 11.6 (Version des Satzes von Tietze). Sei X ein normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gilt folgendes:

1. Jede stetige Funktion $f : A \rightarrow [a, b]$ lässt sich zu einer Funktion $\bar{f} : X \rightarrow [a, b]$ fortsetzen.
2. Jede stetige Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer Funktion $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

12 Der Metrisierungssatz von Urysohn

Satz 12.1 (Metrisierungssatz von Urysohn). Jeder normale Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist metrisierbar.

Beweis.

Beweisstrategie. Schritt 1: Betrachte $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ in der Produkttopologie und zeige, dass der Raum metrisierbar ist. Dieser Raum heißt **Hilbert-Würfel**.

Schritt 2: Sei X normal mit abzählbarer Basis, wir zeigen, dass wir eine Einbettung $F : X \rightarrow \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ finden. Dann sind wir fertig, da

$$X \cong F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1].$$

ein Unterraum eines metrischen Raumes ist.

□ Vorlesung 11
Do 20 Mai 2021

Lemma 12.2 (Hilbert-Raum ist metrisierbar). Der Raum $\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1]$ ist metrisierbar (in der Produkttopologie).

Beweis. Übung. Die Metrik ist hierbei gegeben durch:

$$D((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

□

Lemma 12.3. Sei X ein normaler Raum mit abzählbarer Basis

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}.$$

Dann gibt es eine abzählbare Familie

$$\{f_i : X \rightarrow [0, 1] \mid f_i \text{ stetig}\}.$$

sodass für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung $x \in U$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f_i(x) = 1$ und $f_i(y) = 0$ für $y \notin U$.

Bemerkung 12.4. Wir wissen schon, dass X normal $\implies X$ vollständig regulär, dass wir also solche Funktionen finden, ist bereits klar. Das wichtige am Beweis ist, dass wir abzählbar viele Funktionen finden können, die das schon für alle (!) Punkte tun.

Beweis von Lemma 12.3. Für jedes n, m mit $|B_n| \subseteq B_m$ wenden wir das **Lemma von Urysohn**. an, also gibt es Funktionen

$$\begin{aligned} g_{n,m} &: X \rightarrow [0, 1] \\ g_{n,m}(\overline{B_n}) &= \{1\} \\ g_{n,m}(X \setminus B_m) &= \{0\} \end{aligned}$$

Wir stellen zudem fest, dass diese Familie von Funktionen abzählbar ist, wegen $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

Behauptung 13. Die $(g_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ erfüllen bereits die gewünschte Bedingung.

Unterbeweis. Sei $x \in X$ mit einer Umgebung $x \in U$ gegeben. Da \mathcal{B} eine Basis ist, finden wir $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_m \subseteq U$, da U offen ist. Da X normal ist, finden wir zudem eine offene Menge V mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$ (**Lemma 10.5**, wir erinnern uns, dass Punkte in normalen Räumen abgeschlossen sind nach **Theorem 4.4**). Analog finden wir nun $B_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_n \subseteq V$, erneut, weil \mathcal{B} eine Basis ist.

Dann ist $\overline{B_n} \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$, und $g_{n,m}(x) = 1$ wegen $x \in B_n \subseteq \overline{B_n}$ und $g_{n,m}(y) = 0$ für $y \notin U$, da dann $y \notin B_m$. ■

□

Mündliche Anmerkung 12.5. Für den Beweis von **Theorem 12.1** brauchen wir nicht wirklich, dass wir eine abzählbare Basis finden, sondern es genügt die Eigenschaft ebigen Lemmas. Die abzählbare Basis ist jedoch die einfachste Eigenschaft das zu garantieren.

Beweis des Metrisierungssatz von Urysohn. Seien $(f_i: X \rightarrow [0, 1])_{i \in \mathbb{N}}$ wie in **Lemma 12.3**. Definiere

$$F : \begin{cases} X & \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1] \\ x & \longmapsto (f_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Nach der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist f stetig.

Behauptung 14. F ist eine Einbettung (d.h. ein Homöomorphismus mit dem Bild, siehe **Definition 7.34**).

Unterbeweis. Wir zeigen, dass F injektiv und $F: X \rightarrow F(X)$ offen ist, dann ist F eine Einbettung.

- Seien $x \neq y \in X$. Da X normal ist, finden wir eine offene Menge $x \in U$, $y \notin U$ (erneut, indem wir uns erinnern, dass normale Räume Hausdorff sind, und dann **Theorem 4.4** anwenden). Wegen **Lemma 12.3** gibt es also $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \subseteq f_n(U) = 1$ und $f_n(X \setminus U) = 0$, also

$$f_n(x) = 1 \neq f_n(y) \implies F(x) \neq F(y).$$

Also ist F injektiv.

- Sei $U \subseteq X$ offen. Wir zeigen: $F(U) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}$ ist offen. Sei $z \in F(U)$ mit (eindeutigem) Urbild $x \in U$. Wir konstruieren eine Menge $V \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ offen, sodass $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$, dann ist $F(U)$ offen in $F(X)$.

Erneut nach **Lemma 12.3** erhalten wir ein n mit $f_n(x) = 1$ und $f_n(X \setminus U) = 0$. Setze nun

$$V = [0, 1] \times \dots \times (0, 1] \times [0, 1] \times \dots$$

als offene Teilmenge von $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$, wobei $(0, 1]$ im n -ten Faktor stehe.

Behauptung 15. $z \in V \cap F(X) \subseteq F(U)$ ist eine offene Umgebung (in $F(X)$) von z .

Unterbeweis. Sei $z' = F(x') \in V \cap F(X)$. Es ist $z' \in V$, also $z'_n := f_n(x') \neq 0$, allerdings wissen wir auch $f_n(X \setminus U) = 0$, d.h. $x' \notin X \setminus U$, also folgt $x' \in U$ und somit $z' = F(x') \in F(U)$. Zudem ist wegen $z_n = f_n(x) = 1 \neq 0$ auch $z \in V \cap F(X)$, also handelt es sich um eine offene Umgebung von z . ■

Also ist $F(U)$ offen in $F(X)$ und somit $F: X \rightarrow F(X)$ offen.

Also ist $F: X \rightarrow F(X)$ offen und injektiv, und somit eine Einbettung. ■

Nun stellen wir also fest, dass $X \cong F(X)$ (wegen der Einbettung), aber $F(X) \subseteq \prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ ist metrisierbar als Teilraum eines metrisierbaren Raums, also ist X metrisierbar und das wollten wir zeigen. □

Mündliche Anmerkung 12.6. Wo haben wir jetzt wirklich benutzt, dass das Produkt abzählbar war?. Man überlegt sich, dass wir den exakt gleichen Beweis für jede Kardinalität einer Basis hätten durchführen können, um nach $\prod_{\aleph}[0, 1]$ einzubetten. Das wirkliche Problem ergibt sich dann erst, wenn wir zeigen (in der Übung), dass $\prod_{\mathbb{N}}[0, 1]$ metrisierbar ist. Es stellt sich heraus, dass das nur für $\aleph \leq \omega$, dh. für abzählbare Indexmengen der Fall ist.

Teil II

Algebraische Topologie

Motivation

Bisher haben wir Topologische Räume und ihre Eigenschaften wie Hausdorff, normal, Kompakt oder zusammenhängend gesehen, um diese zu unterscheiden. Im 2. Teil der Vorlesung kümmern wir uns nun um weitere Topologische Invarianten.

Beispiel 12.7. Setze $\pi_0(X) :=$ als die Menge der Wegkomponenten von X , d.h. $\pi_0(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $U \in \pi_0(X)$ genau dann, wenn U wegzusammenhängend und inklusionsmaximal, d.h. $\nexists V$ wegzusammenhängend mit $U \subsetneq V$. Dann ist $\pi_0(X)$ eine topologischen Invariante.

Bemerkung* 12.8. Mit 'topologischen Invariante' meinen wir natürlich immer eine Eigenschaft eines topologischen Raumes, die von Homöomorphismen erhalten wird, also nicht von der konkreten Wahl des Raumes abhängt.

Beispiel 12.9. • $\pi_0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}\}$, da \mathbb{R} wegzusammenhängend

- $\pi_0(\mathbb{N}) = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, weil die einzigen wegzusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{N} die einpunktigen Mengen sind
- Betrachte die Sinuskurve des Topologen (vgl. [Aufgabe 5.1](#)). Diese ist definiert als der Abschluss des Graphen G von $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ für $x > 0$. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten genau G selbst (blau) sowie $\overline{G} \setminus G$ (rot).

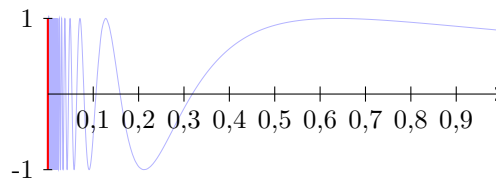


Abbildung 22: Sinuskurve des Topologen

Beispiel 12.10. Eine Invariante, die wir noch nicht kennen, ist π_1 . Hierzu definiere für $x_0 \in X$:

$$\pi_1(X, x_0) = \{\text{Abbildungen } f: S^1 \rightarrow X, 1 \mapsto x_0\} / \text{'Verschieben'}$$

Mündliche Anmerkung 12.11. 'Verschieben' ist an dieser Stelle (bewusst) noch nicht präzisiert. Wir werden sehen, dass wir damit 'Homotopie' meinen, dazu aber später mehr, wenn wir das ganze detailliert behandeln.

Fakt 12.12. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so induziert f Abbildungen

$$\begin{aligned} f_* &: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y) \\ f_* &: p_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \end{aligned}$$

Formal sind π_0, π_1 sogenannte **Funktoren**, deswegen wollen wir uns im Folgenden etwas genauer die sogenannte **Kategorientheorie** ansehen, die solche Konzepte behandelt.

13 Kategorien

13.1 Einschub: Mengentheorie

Bemerkung* 13.1. Das folgende Kapitel ist sehr formal und holt weit aus, was wir nicht (wirklich) verwenden. Es dient nur dazu, unserem folgenden Handeln eine formale Grundlage zu verleihen, hat aber keinen (wirklichen) weiteren Einfluss auf die Vorlesung.

Eine Einführung in die Logik und Mengenlehre, die auf die Topologie hinarbeitet, findet sich in [Mun18, Kapitel 1].

Für Formaleres zu Kardinalitäten sei auf auf das Vorlesungsskript [Koe18] verwiesen, dort wird allerdings auch vieles behandelt, das hier nicht relevant ist.

Wir fordern neben den üblichen Axiomen von **ZFC** (hierbei steht **C** für das sogenannte **Auswahlaxiom**), noch die Existenz mehrerer unerreichbarer Kardinalzahlen (d.h. welche außer $\aleph_0 := \text{card}(\mathbb{N})$, die wir $\aleph_0 < \kappa < \kappa'$ nennen)

Definition 13.2 (unerreichbare Kardinalzahl). κ ist eine **unerreichbare Kardinalzahl**, falls

- $\text{card}(\bigcup_{i \in I} X_i) < \kappa$ für alle I, X_i mit $\text{card}(I), \text{card}(X_i) < \kappa$.
- $\text{card}\{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ Abbildung}\} < \kappa$ für alle Mengen X, Y mit $\text{card}(X), \text{card}(Y) < \kappa$.

Bemerkung* 13.3 (Logik-Spam). Eine überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl liefert uns zugleich ein Modell von **ZFC**, wir können deren Existenz also nicht innerhalb von **ZFC** zeigen (vgl. Gödelscher Unvollständigkeitssatz), deren Existenz ist jedoch konsistent genau dann, wenn **ZFC** selbst Widerspruchsfrei ist (wovon wir ausgehen). Insbesondere sollte man über κ so nachdenken, dass alles, das man definieren kann / betrachtet, bzw. alle 'interessanten' Mengen

$< \kappa$ sind. So sollte man auch über κ nachdenken: Durch keine Begriffsbildungen, die Dinge $< \kappa$ verwenden, können wir κ erreichen, also bildet κ etwas wie den Horizont des Universums (der Mengen).

Definition 13.4 (Menge, Klasse). • Der Begriff **Mengen** heißt für uns ab nun *alle Mengen mit Kardinalität $< \kappa$* .

- Der Begriff **Klasse** steht für alle Mengen mit Kardinalität $< \kappa'$.

Bemerkung* 13.5. Diese Begrifflichkeiten dienen nur dazu, dass wir über die Klasse aller Mengen V reden können, die keine Menge ist. (auch nicht im herkömmlichen Sinne). Es gibt auch andere Ansätze, um das zu ermöglichen, wie etwa das Beschreiben von Klassen mittels Formeln, für uns ist obiger Ansatz jedoch am einfachsten. Merken sollte man sich vor allem

- Jede Menge ist eine Klasse, aber nicht zwingend umgekehrt. $V = \{M \mid M \text{ ist Menge}\}$ ist die Klasse aller Mengen, oder auch das Universum aller Mengen.
- Wir können Mengen beliebig zu einer Klasse zusammenfassen, d.h. ist $\varphi(M)$ eine Formel (Eigenschaft) einer Menge M , so ist

$$\{M \mid \varphi(M)\} := \{M \mid \varphi(M), M \text{ ist Menge}\}.$$

eine Klasse.

- Für Klassen gilt das nicht mehr, d.h.

$$\{K \mid K \text{ ist Klasse}\}.$$

ist keine Klasse (und damit [für uns] kein definierter Ausdruck. Sonst könnten wir das **Russel'sche Paradoxon** herleiten.

13.2 Kategorien

Bemerkung* 13.6. Für eine ausführlichere Einführung zur Kategorientheorie siehe z.B. [Lei14].

Definition 13.7 (Kategorie). Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- Einer Klasse von **Objekten**, notiert $\text{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von **Morphismen**
- Für $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ Verknüpfungsabbildungen

$$\circ : \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

mit $(f, g) \mapsto g \circ f$, sodass \circ assoziativ ist.

- Jede Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ enthält eine Identität id_X , sodass

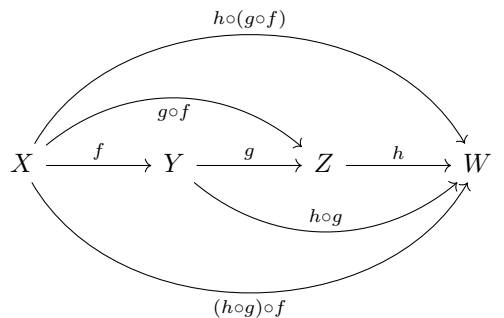
$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{id}_X \circ g = g.$$

für $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ beliebig.

Notationsmissbrauch* 13.8. Wir schreiben $X \in \mathcal{C}$ für $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Notation* 13.9. Aus naheliegenden Gründen notieren wir $f : X \rightarrow Y$ für $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

Bemerkung* 13.10 (Assoziativität und kommutative Diagramme). Mit Assoziativität meinen wir das folgende: Sind $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, so ist $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Wir veranschaulichen dies in einem **kommutativen Diagramm** (das ist typisch für die Kategorientheorie, wir malen Objekte als Punkte und Elemente von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Pfeile von $X \rightarrow Y$, so sollte man sich das vorstellen):



Wir fordern also, dass beide Möglichkeiten, sich eine Abbildung $X \rightarrow W$ zusammenzubauen, die gleichen sind.

Bemerkung 13.11. • Ist $\text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge, so heißt \mathcal{C} klein.

- Da $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ Mengen sind, heißt \mathcal{C} in der Literatur manchmal lokal klein, manche Autoren lassen für $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ auch Klassen zu, wir jedoch nicht.

Beispiel 13.12. • **Set** ist die Kategorie der Mengen und all ihrer Abbildungen dazwischen.

- **Top** X ist die Kategorie der topologischen Räume und ihren stetigen Abbildungen.
- **Grp** ist die Kategorie der Gruppen und ihren Gruppenhomomorphismen
- **Vect** $_{\mathbb{R}}$ ist die Kategorie der \mathbb{R} -Vektorräume und den linearen Abbildungen dazwischen.
- **Top** $_{\star}$ ist die Kategorie der punktierten topologischen Räume. Wir setzen

$$\text{Ob}(\mathbf{Top}_{\star}) = \{(X, x_0) \mid X \text{ topologischer Raum, } x_0 \in X\}.$$

d.h. Objekte sind topologische Räume mit einem ausgezeichneten **Basispunkt** $x_0 \in X$. Von den Morphismen fordern wir, dass sie diesen Basispunkt erhalten, d.h.

$$\text{Mor}_{\mathbf{Top}_{\star}}((X, x_0), (Y, y_0)) := \{f: X \rightarrow Y \text{ stetig} \mid f(x_0) = y_0\}.$$

Bemerkung 13.13. Die Kategorientheorie bildet zunächst eine Sprache, mit der wir sehr vieles präziser ausdrücken können. Wir sollten auch so über sie nachdenken, d.h. die Kategorientheorie hilft uns, Dinge aus vielen verschiedenen Teildisziplinen (siehe Liste der Beispiele oben) elegant und knapp zusammenzufassen und Beweise, die gleich geführt werden, zu vereinheitlichen.

Definition 13.14 (Unterkategorie). • \mathcal{U} ist eine **Unterkategorie** von \mathcal{C} , falls \mathcal{U} eine Kategorie ist mit $\text{Ob}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$, und $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ ist

$$\text{Mor}_{\mathcal{U}}(X, Y) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

- Ist zudem für $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{U})$ obige Inklusion sogar eine Gleichheit, d.h. $\text{Mor}_{\mathcal{U}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, so heißt \mathcal{U} **volle** Unterkategorie.

Beispiel 13.15. • **Fin** \subseteq **Set** ist die Unterkategorie der endlichen Mengen (jede endliche Menge ist eine Menge)

- **CHaus** \subseteq **Top** ist die Unterkategorie der kompakten Hausdorffräume (jeder kompakte Hausdorff-Raum ist ein topologischer Raum)
- **Ab** \subseteq **Grp** ist die Unterkategorie der abelschen Gruppen (jede abelsche Gruppe ist eine Gruppe)

Alle 3 Beispiele sind volle Unterkategorien.

Definition 13.16 (Isomorphismus). $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist ein **Isomorphismus**, wenn es ein $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ (d.h. eine Umkehrabbildung).

Ist $f: X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, d.h. es gibt ein Inverses g , so ist g bereits eindeutig. Seien hierzu g, g' beides Inverse zu f , dann ergibt sich

$$g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_X \circ g' = g'.$$

Beispiel 13.17. $f \in \mathbf{Top}$ ist ein Isomorphismus, wenn f ein Homöomorphismus ist.

Definition 13.18 (Funktor). Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Ein (kovarianter) **Funktor** $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Abbildung $\mathcal{F}: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$.
- Abbildungen $\mathcal{F}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ für alle Objekte $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

sodass

- $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$

Definition 13.19 (Isomorphismus von Kategorien). Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein **Isomorphismus**, falls es einen Funktor $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ die Identitäten sind.

Mündliche Anmerkung 13.20. Ein Funktor \mathcal{F} ist hierbei die Identität ('der Identitätsfunktor'), wenn er sowohl Objekte als auch Abbildungen auf sich selbst schickt.

Mündliche Anmerkung 13.21. Im Gegensatz zu den Begrifflichkeiten ist ein Isomorphismus von Kategorien nicht die gängigste Version von 'Gleichheit'. Nur in Seltenen Fällen sind Kategorien tatsächlich isomorph (nach ebiger Definition), allerdings oft *äquivalent*. Mehr dazu später.

Beispiel 13.22. • Es gibt einen Funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, der jeden topologischen Raum auf seine Trägermenge sendet, und (stetige) Abbildungen zwischen den topologischen Räumen auf die zugehörigen Abbildungen zwischen den Trägermengen. Dieser Funktor heißt oft **vergesslicher Funktor**, auch wenn das kein Fachbegriff ist, sondern eher ein gängiges Schema. Wir können im wesentlichen alle möglichen Strukturen vergessen.

- $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ als Inklusion ist ein Funktor, da jede abelsche Gruppe auch

Gruppe ist, und Gruppenhomomorphismen von abelschen Gruppen natürlich auch Gruppenhomomorphismen.

- Betrachte den Funktor

$$\mathcal{F} : \begin{array}{l} \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Ab} \\ X \longmapsto \mathbb{Z}[X] \\ f : X \rightarrow Y \longmapsto \begin{array}{l} \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}[Y] \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^k n_i f(x_i) \end{array} \end{array}$$

Wir senden hierbei eine Menge X auf die **freie abelsche Gruppe**, die von X generiert wird. Dabei ist $\mathbb{Z}[X]$ das (freie) \mathbb{Z} -Modul, das als Basis von X erzeugt wird.

Vorlesung 12
Di 01 Jun 2021

Definition 13.23 (kontravarianter Funktor). Ein **kontravarianter** Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus

- einer Abbildung $\mathcal{F} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$
- Abbildungen $\mathcal{F} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ für $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

sodass

$$\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}, \quad \mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

Beispiel 13.24 (Dualraum). Das Bilden des Dualraums eines Vektorraums bildet einen Funktor

$$()^* : \begin{array}{l} \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\ V \longmapsto V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) \\ f : V \rightarrow W \longmapsto f^* : \begin{array}{l} W^* \longrightarrow V^* \\ W \xrightarrow{g} \mathbb{R} \longmapsto V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ g \longmapsto g \circ f \end{array} \end{array}$$

Bemerkung* 13.25. Natürlich ist hier an \mathbb{R} nichts besonders, das geht mit jedem Körper K .

Definition 13.26 (Dualkategorie). Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so ist \mathcal{C}^{op} die Kategorie mit $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, sowie $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, und 'denselben' Verknüpfungen.

Bemerkung* 13.27. 'Dieselben' Verknüpfungen, d.h für $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) =$

$\text{Ob}(\mathcal{C})$ definieren wir:

$$\circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} : \begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ_{\mathcal{C}} g \end{array}$$

indem wir uns erinnern, dass $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

Lemma 13.28. Ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein (kovarianter) Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

*Beweis**. Nur Definitionen ausschreiben, wirklich nichts spannendes, sollte man aber einmal machen als Übung. \square

Beispiel 13.29. $\text{Vect}_{\mathbb{R}}^{\text{op}} \xrightarrow{(\cdot)^*} \text{Vect}_{\mathbb{R}}$ als kovarianter Funktor, analog zu vorherigem Beispiel.

Beispiel 13.30. **Cat** ist die Kategorie der kleinen Kategorie und Funktoren.

Mündliche Anmerkung 13.31. Wir betrachten hier nur die kleinen Kategorien (also die, deren Objekte eine Menge bilden), damit wir nicht im Probleme wieder 'Klasse aller Klassen' laufen, solche Probleme könnte man aber auch wieder umgehen, wenn man weitere unerreichbare Kardinalzahlen fordert.

Definition 13.32 (natürliche Transformation und Äquivalenz). Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren.

- i) Eine **natürliche Transformation** $t: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist eine Familie von Morphismen (in \mathcal{D})

$$\{t_X \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))\}_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}.$$

sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(Y) \\ t_X \downarrow & & \downarrow t_Y \\ \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

kommutiert.

- ii) t ist eine **natürliche Äquivalenz** (auch natürlicher Isomorphismus genannt), falls jedes t_X ein Isomorphismus ist.
 iii) $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist eine **Äquivalenz** (von Kategorien), falls es einen Funktor

$\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt, sodass $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ jeweils natürlich äquivalent zum Identitätsfunktoren sind.

Bemerkung* 13.33. Die Idee an obigem kommutativen Diagramm ist einfach, dass wir nun per se zwei Wege haben, von $\mathcal{F}(X)$ nach $\mathcal{G}(Y)$ zu gelangen, und wir wollen, dass diese gleich sind.

Mündliche Anmerkung 13.34. Die Idee daran, natürliche Äquivalenz von Kategorien zuzulassen ist, dass wir uns nicht mehr um die Anzahl von (in einer Kategorie) zueinander isomorphen Objekten kümmern müssen, und davon ebenfalls wegabstrahieren.

Beispiel 13.35. Es gibt eine natürliche Transformation $t: \text{id}_{\text{Vect}_{\mathbb{R}}} \rightarrow ()^{**}$, gegeben durch Komponenten für jeden \mathbb{R} -Vektorraum V :

$$t_V : \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^*, \mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & \text{ev}_v : \left| \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(v) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Wir müssen prüfen, dass folgendes Diagramm für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ t_V \downarrow & & \downarrow t_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Sei hierzu v beliebig, dann erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} v & \longrightarrow & f(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{ev}_v & \longrightarrow & \text{ev}_v^{**} = \text{ev}_{f(v)} \end{array}$$

Um zu sehen, dass die beiden Abbildungen, die wir rechts unten erhalten, gleich sind, sollte man sich kurz klarmachen, dass es sich dabei um Elemente aus $W^{**} = \text{Hom } W^*, \mathbb{R}$ handelt, also können wir zeigen, dass die Abbildungen gleich sind, indem wir ein Element $g \in W^* = \text{Hom}(W, \mathbb{R})$ einsetzen, und die gleiche reelle Zahl erhalten. Dazu ist erstmal:

$$\text{ev}_{f(v)}(g) \stackrel{\text{Def. von ev}}{=} g(f(v)) = (g \circ f)(v).$$

sofort nach Definition. Die andere Rechnung ist etwas langwieriger, aber nur

direktes Definitionen-Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \text{ev}_v^{**}(g) &= ((f^*)^*(\text{ev}_v))(g) \\
 &\stackrel{a^*(b)=b \circ a}{=} (\text{ev}_v \circ f^*)(g) \\
 &= \text{ev}_v(f^*(g)) \\
 &\stackrel{a^o(b)=b \circ a}{=} \text{ev}_v(g \circ f) \\
 &\stackrel{\text{Def. von ev}}{=} \text{ev}(g \circ f)(v)
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir die gleiche reelle Zahl, also schlussendlich $(\text{ev}_v^*)^* = \text{ev}_{f(v)}$ wie gewünscht, das Diagramm kommutiert und in der Tat handelt es sich bei t um eine natürliche Transformation $\text{id}_{\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}} \rightarrow ()^{**}$

Beispiel 13.36. Betrachte die Kategorie der endlich-dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{R}^∞ mit ihren linearen Abbildung und diese mittels eines Inklusionsfunktors in $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$ (endlich-dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume)

Mündliche Anmerkung 13.37 (In der Pause). Es ist $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$ keine kleine Kategorie, denn wir können z.B. für jede beliebige Menge X die Menge $\mathbb{R}^n \times \{X\}$ bilden und diese kanonisch wieder als \mathbb{R}^n auffassen, damit erhalten wir also für jede Menge (mindestens) ein Objekt in $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$, und damit können wir auch die Menge aller Mengen basteln.

Umgekehrt ist aber die Kategorie der endlich dimensionalen Untervektorräume von \mathbb{R}^∞ eine kleine Kategorie, weil jedes Objekt ja insbesondere eine Teilmenge von \mathbb{R}^∞ (zumindest die Trägermenge) ist, und wir damit wieder eine Menge erhalten.

Mündliche Anmerkung 13.38. Man kann zeigen, dass ein Funktor \mathcal{F} genau dann eine natürliche Äquivalenz ist, wenn er essentiell surjektiv und eine Bijektion auf den Morphismen ist.

Essentiell surjektiv bedeutet, dass für jedes Objekt $Y \in \mathcal{D}$ ein zu Y isomorphes Objekt Z existiert, das im Bild von \mathcal{F} liegt.

Bijektion auf Morphismen heißt, dass \mathcal{F} einen Isomorphismus $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) \cong \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ mittels $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ induziert.

Mündliche Anmerkung 13.39. Das tolle an obigem Beispiel ist, dass wir nun eine Äquivalenz zwischen $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$ und einer kleinen Kategorie gefunden habe. Das ist toll, wenn wir z.B. mit **Cat** arbeiten wollen, weil wir dann hier zwar $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{f.d.}$ nicht als Objekt wiederfinden, allerdings eine dazu natürlich äquivalente Kategorie.

Beispiel 13.40. Betrachte die natürliche Transformation $t: \text{id}_{\mathbf{Grp}} \rightarrow ()^{ab}$, gegeben durch Komponenten für jede Gruppe G :

$$t_G : \begin{array}{ccc} G & \twoheadrightarrow & G/[G, G] \\ g & \mapsto & [g] \end{array}$$

Ist G eine Gruppe und $a, b \in G$, so ist $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der **Kommutator** der beiden Elemente (der Name kommt daher, dass $[a, b] = e$ genau dann, wenn a, b kommutieren), und $[G, G]$ ist die Untergruppe von G , die von den Kommutatoren in G erzeugt wird, d.h. alle endlichen Verknüpfungen von solchen Kommutatoren. Man kann nun zeigen, dass $[G, G] \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe ist, und $G/[G, G]$ ist abelsch und die **Abelisierung** von G . Wir erhalten ebenfalls die kanonische Projektion $G \twoheadrightarrow G/[G, G]$.

Wir können Gruppen auch als $\langle E \mid R \rangle$ darstellen, wobei E eine Menge an Symbolen und R eine Menge an Relationen ist. Die beschriebene Gruppe besteht dann aus allen Wörtern, die die Buchstaben der Menge E und deren Inversen bilden, modulo der erzeugten Untergruppe der Relationen.

- $\langle a, b \mid \emptyset \rangle = \langle a, b \rangle \cong F_2$ ist die freie Gruppe mit 2 Elementen. Sie besteht aus Wörtern wie $aba^{-1}b^{-2}a^3$, bei der keine Relationen gelten (außer $aa^{-1} = a^{-1}a = e, bb^{-1} = b^{-1}b = e$, was immer gefordert wird).
- $\langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, denn jetzt kommutieren beliebige zwei Elemente, und wir können jedes Wort aus a, b, a^{-1}, b^{-1} als $a^n b^m$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ umschreiben, und der Isomorphismus zu \mathbb{Z}^2 ist kanonisch.
- $\langle a, b \mid [a, b], a^3, b^3 \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, denn jetzt ist ja zusätzlich noch $a^3 = b^3 = e$ das neutrale Element.

Mündliche Anmerkung 13.41. ⚠ Es sei noch darauf hingewiesen, dass nicht alle Relationen, die gelten, aufgeführt sein müssen. Im dritten Beispiel ist ja z.B. auch $a^6 = e$, weil $a^6 = a^3 a^3 = ee = e$.

Bemerkung* 13.42. Es sei gesagt, dass wir jede Gruppe in obiger Form darstellen können, indem wir E als die Trägermenge von G wählen, und nun einfach für jede Gleichung $g_1 g_2 = g_3$, die in G gilt, die entsprechende Relation $g_1 g_2 g_3^{-1}$ in R fordern. (Das wird aber schnell hässlich, don't do it!)

Bemerkung* 13.43. ⚠ Auch, wenn diese Darstellung von Gruppen sehr schön sein kann, ist sie sicherlich nicht immer die Beste. Es ist z.B. ein NP-vollständiges Problem, für eine Darstellung $\langle E \mid R \rangle$ zu entscheiden, ob die dadurch definierte Gruppe trivial ist, d.h. nur aus einem Element besteht.

Als nächstes kann man sich überlegen, dass wir Morphismen von $G = \langle E \mid R \rangle$ in eine Gruppe H genau angeben können durch $f(g)$ für jedes Element $g \in E$, sodass $f(r) = e$ für jede Relation $r \in R$. (Dabei meinen wir mit $f(r)$ für $r = g_1 g_2, \dots, g_n$ einfach $f(g_1) \circ f(g_2) \circ \dots \circ f(g_n)$).
 Damit kann man dann auch die Abbildung $G \rightarrow G/[G, G]$ leicht angeben, denn haben wir G dargestellt als $\langle E \mid R \rangle$, so ist $G/[G, G]$ gegeben durch $\langle E \mid R, \{[a, b]\}_{a, b \in G^2} \rangle$, und den Morphismus geben wir durch $f(g) = g$ an.

13.3 Limiten und Kolimiten

Um Limiten und Kolimiten zu betrachten, brauchen wir sogenannte **Diagramme**:

Sei \mathcal{C} eine Kategorie und \mathcal{I} eine kleine Kategorie. Wir stellen uns dann \mathcal{I} als Diagramm vor, z.B. eines der folgenden drei Beispiele:

$$\begin{array}{c}
 \star \longrightarrow \star \\
 \downarrow \\
 \star
 \end{array}
 \quad \dots \longrightarrow \star \longrightarrow \star \longrightarrow \dots
 \quad \star \rightrightarrows \star \tag{3}$$

Definition 13.44 (Terminales Objekt). Ein **terminales** Objekt in \mathcal{C} ist ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, sodass es für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen eindeutigen Morphismus $Y \rightarrow X$ gibt, d.h.

$$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}): \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X) = \{\star\}.$$

Mündliche Anmerkung 13.45. Es gibt zwar nicht die Definition *des* terminalen Objekts, allerdings überlegt man sich leicht, dass terminale Objekte bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig sind, deswegen ist eine Unterscheidung nicht notwendig bzw. erfolgt normalerweise nicht.

Beispiel 13.46. In **Top** und **Set** sind die Einpunktmengen die terminalen Objekte.

Bemerkung* 13.47. In der Vorlesung wurde der Begriff 'Kegelkategorie' auf einmal definiert, ich splitte das ganze jedoch auf, weil auch Kegel einzeln danach noch Verwendung finden, und ich das so lieber mag, der Inhalt ist aber derselbe:

Notationsmissbrauch 13.48. Sei \mathcal{I} eine kleine Kategorie, \mathcal{C} eine beliebige Kategorie und $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Für $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ schreiben wir auch kurz $X_i := X(i)$, um die entsprechenden Bildobjekte des Funktors in \mathcal{C} zu bezeichnen.

Bemerkung* 13.49. So sollte man auch wirklich über diese Diagramme nachdenken, \mathcal{I} ist einfach eine elegante Möglichkeit, eine Menge von Objekten in \mathcal{C} mittels \mathcal{I} zu indizieren (= Indizes zu verteilen), und gleichzeitig einige Morphismen zwischen diesen Objekten mit zu beschreiben.

Definition* 13.50 (Kegel). Sei \mathcal{I} eine kleine Kategorie und $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Ein **Kegel** über X ist ein Objekt $N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit einer Familie von Morphismen $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, wobei $f_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, X_i)$, sodass für jeden Morphismus $h \in \text{Mor}_{\mathcal{I}}(i, j)$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ X_i & \xrightarrow{X(h)} & X_j \end{array} .$$

Bemerkung 13.51. Der name Kegel kommt daher, dass N gewissermaßen mit den Morphismen f_i einen Kegel über den X_i erzeugt. Ist z.B.

$$\mathcal{I} = \begin{array}{ccc} \star & \xrightarrow{\quad} & \star \\ & \searrow & \swarrow \\ & \star & \end{array}$$

so ergibt sich als Ausschnitt der Kategorie \mathcal{C} ein *kommutatives* Diagramm (kommutativ wegen der Kommutativitätsbedingung in der Definition):

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f_1 \swarrow \text{---} & & \text{---} \searrow f_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\quad} & X_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & X_3 & \end{array} .$$

Definition 13.52 (Kegelkategorie). Sei $X : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Die **Kegelkategorie** \mathcal{C}/X hat als Objekte genau die Kegel über X . Die Morphismen zwischen Kegeln $(Y, \{f_i\}) \rightarrow (Y', \{f'_i\})$ sind gegeben durch $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$ (also durch übliche Morphismen zwischen Y, Y' als Objekten von \mathcal{C}), sodass für

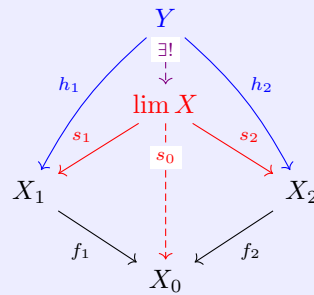
alle $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y' \\ & \searrow f_i & \swarrow f'_i \\ & X_i & \end{array} .$$

Mündliche Anmerkung 13.53. Ist \mathcal{I} einelementig, so erhalten wir die Kategorie über $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, vergleiche hierzu [Aufgabe 6.4](#).

Bemerkung* 13.54. Morphismen zwischen Kegeln lassen im Wesentlichen einfach 'alles' kommutieren, d.h. zeichnen wir die beiden Kegel und den entsprechenden Morphismus zwischen ihnen ein, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm.

Definition 13.55 (Limes). Ein Limes für $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein terminales Objekt in \mathcal{C}/X .



Zur Erklärung des Diagramms: In rot und blau die beiden Kegel $\lim X$ und Y über dem Diagramm X (in schwarz). In violett der induzierte Morphismus $Y \rightarrow \lim X$ (der sogar ein Morphismus in \mathcal{C}/X ist!), der eindeutig existiert, weil $\lim X$ ein Terminalobjekt in \mathcal{C}/X ist.

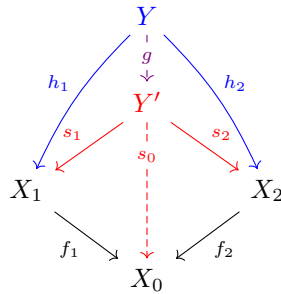
Notation 13.56. Existiert 'der' (eigentlich ein) Limes von $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, so notieren wir ihn mit $\lim X$.

Warnung. Es muss nicht immer ein Limes existieren (d.h. es gibt nicht immer ein terminales Objekt in jeder Kategorie)

Mündliche Anmerkung 13.57. Limiten sind eindeutig, wenn sie existieren (bis auf eindeutigen Isomorphismus)

Beweis.* Das ganze ist ein 'Standard'-Beweis für Objekte mit universeller Eigenschaft. Seien Y, Y' beides Limiten über $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, wir werden zeigen, dass diese

isomorph mit eindeutigem Isomorphismus sind. Nach universeller Eigenschaft existiert zunächst eine (eindeutige) Abbildung $g: Y \rightarrow Y'$ in der Kegelkategorie, sodass das Diagramm



kommutiert. Analog finden wir jedoch $f: Y' \rightarrow Y$ als Morphismus in der Kegelkategorie, denn Y ist ja ebenfalls ein Limes und Y' ist ein Kegel. Nun ist $f \circ g: Y \rightarrow Y$ eine Abbildung von Y (ein Kegel) nach Y (der Limes) in der Kegelkategorie. Allerdings ist solch eine Abbildung eindeutig bestimmt (Definition des Terminalobjekts), und wir wissen auch, dass offensichtlich die Identitätsabbildung $\text{id}: Y \rightarrow Y$ ein Morphismus ist, der ebenfalls zur Kegelkategorie gehört. Also muss bereits $f \circ g = \text{id}_Y$ gelten. Völlig analog zeigt man $g \circ f = \text{id}_{Y'}$, und damit sind g bzw. f die geforderten Isomorphismen.

Für die Eindeutigkeit von f, g reicht es zu bemerken, dass ja bereits die Abbildung $g: Y \rightarrow Y'$ eindeutig bestimmt war, also kann es erst recht keine weiteren Isomorphismen geben. \square

Beispiel 13.58. 1) Sei $\mathcal{I} = \emptyset$ die leere Kategorie, dann ist $\mathcal{C}/X \cong \mathcal{C}$. Also ist $\lim X$ ein terminale Objekt.

2) Sei $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ (mit nur den Identitätsabbildungen). Sei $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ gegeben durch $X_1, X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, dann ist $\lim X$ das Produkt von X_1 und X_2 . In **Top** und **Set** ist dieses das klassische / bekannte Produkt $X_1 \times X_2$ (mit Projektionen!)

3) Sei

$$\mathcal{I} = \begin{array}{ccc} & \star & \\ & \downarrow & \\ \star & \longrightarrow & \star \end{array} \quad X = \begin{array}{ccc} & X_2 & \\ & \downarrow f_2 & \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 \end{array}$$

dann ist $\lim X$ das **Faserprodukt** (Pullback). In **Top** bzw. **Set** ist

$$\lim X = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x_1) = f_2(x_2)\}.$$

mit der Teilraumtopologie des Produktes und inklusive der entsprechenden Projektionen.

Mündliche Anmerkung 13.59. Zu einem Limes gehören immer auch die entsprechenden Abbildungen, oft unterdrücken wir diese jedoch implizit.

Definition 13.60 (Initiales Objekt). Ein initiales Objekt in \mathcal{C} ist ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, sodass für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine eindeutige Abbildung von X nach Y existiert, d.h.

$$\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}): \quad \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{\star\}.$$

Beispiel 13.61. In **Top** bzw. **Set** ist \emptyset das initiale Objekt.

Definition 13.62 (Kokegelkategorie). Die Definition ist völlig analog zu der des Kegels, nur dass wir die Richtungen der Morphismen umdrehen:

Ein **Kokegel** über $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Paar $(Y, \{f_i\}_{i \in \mathcal{I}})$, sodass $f_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$ (die Morphismen gehen jetzt in die andere Richtung) und für jeden Morphismus $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(i, j)$ das entsprechende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{X(h)} & X_j \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & & Y \end{array} .$$

kommutiert. Die Kokegelkategorie besteht X/\mathcal{C} (sprich: ' \mathcal{C} unter X ') nun aus allen Kokegeln, wobei ein Morphismus $(Y, \{f_i\}) \rightarrow (Y', \{f'_i\})$ gegeben ist durch $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$, sodass für alle $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ Y & \xrightarrow{g} & Y' \end{array} .$$

Definition 13.63 (Kolimes). Ein **Kolimes** ist ein Initialobjekt in der Kokegelkategorie X/\mathcal{C} .

Warnung. Auch hier gilt wieder: Initialobjekte und damit Kolimiten müssen nicht immer existieren.

Mündliche Anmerkung 13.64. Auch das Konzept des Kolimes kann man wieder auf das des Limes zurückführen, indem wir die duale Kategorie betrachten. Alle Ergebnisse über Limiten gelten also auch (dual) für Kolimiten.

Lemma* 13.65 (Kolimes als Limes in der Dualkategorie). Wir fassen das Diagramm $X: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ als Funktor $X^{\text{op}}: \mathcal{I}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ auf. Es ist nun $(X/\mathcal{C})^{\text{op}} \cong \mathcal{C}^{\text{op}}/X^{\text{op}}$. Unter diesem Isomorphismus, zusammen mit dem kanonisch kontravarianten Funktor $X/\mathcal{C} \rightarrow (X/\mathcal{C})^{\text{op}}$ geht nun $\text{colim } X$ in $\text{lim } X^{\text{op}}$ über.

Beispiel 13.66. 1) Ist $\mathcal{I} = \emptyset$, so erhalten wir ein initiales Objekt.

2) Ist $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ und $X = X_1, X_2$, dann ist $\text{colim } X$ das **Koprodukt**. In **Top** bzw. **Set** ist dieses $X_1 \coprod X_2$ (mit den entsprechenden Inklusionen).

3) Betrachte

$$\mathcal{I} = \begin{array}{ccc} \star & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \\ \star & & \end{array} \quad X = \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \\ X_1 & & \end{array} .$$

Dann ist $\text{colim } X$ das **Pushout** (Kofaserprodukt). In **Top** bzw. **Set** ist das $X_1 \bigcup_{X_0} X_2$

Vorlesung 13
Di 08 Jun 2021

Beispiel 13.67. 1) Wir können eine Gruppe G als Kategorie auffassen, indem wir $\text{Ob } \mathcal{G} = \{\star\}$ und $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(\star, \star) = G$ setzen, wobei natürlich $g \circ h = gh$. Man könnte das in etwa so skizzieren:

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \downarrow & \\ f \circlearrowleft & \bullet & \circlearrowright g \\ & \uparrow & \\ & f \circ g & \end{array}$$

2) Ein **G-Objekt** in einer Kategorie \mathcal{C} (G ist eine Gruppe) ist ein Funktor $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ (dieser Funktor besteht aus einem Objekt von \mathcal{C} zusammen mit Endomorphismen dieses Objekts für jedes $g \in G$)

Bemerkung* 13.68. Ein typisches Beispiel sind Gruppenwirkungen, wählen wir hier $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, so sind die G -Objekte genau G -Mengen bzw. G wirkt dann auf die entsprechende Menge $\mathcal{F}(\mathcal{G}) \in \mathbf{Set}$.

3) Sind \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien, so gibt es die **Produktkategorie** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, die wir erhalten, indem wir $\text{Ob } \mathcal{C} \times \mathcal{D} = \text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{D}$ (dieses Produkt müssen wir potenziell als das von Klassen auffassen) setzen und als Morphismen

$$\text{Mor}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Mor}_{\mathcal{D}}(Y, Y').$$

setzen mit komponentenweiser Komposition, d.h. $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

4) Das **Wedge-Produkt** (\vee , siehe **Definition 8.22**) können wir nun als Funktor

$$\vee : \mathbf{Top}_{\star} \times \mathbf{Top}_{\star} \rightarrow \mathbf{Top}_{\star} .$$

auffassen, mittels

$$((X, x_0), (Y, y_0)) \mapsto X \amalg_{x_0 \sim y_0} Y =: X \bigcup_{\{*\}} Y.$$

wobei der Punkt $x_0 \sim y_0$ der Basispunkt des neuen Raumes ist. Das Wedge-Produkt ist gleichzeitig auch das Koprodukt in \mathbf{Top}_* .

Analog geht das auch für das **Smash-Produkt** (\wedge , siehe [Definition 8.26](#)).

$$\wedge : \mathbf{Top}_* \times \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_* .$$

mittels

$$((X, x_0), (Y, y_0)) \mapsto X \times Y / X \vee Y .$$

wobei wir die Einbettung

$$\begin{aligned} X \vee Y &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x, y_0) \\ &\longmapsto (x_0, y) \end{aligned}$$

gewählt haben, um den Quotienten zu bilden, und das Bild von $X \vee Y$ als Basispunkt von $X \wedge Y$ wählen.

Mündliche Anmerkung 13.69. Das Smash-Produkt ist **nicht** das Produkt in \mathbf{Top}_* , denn dieses ist gegeben durch das übliche Produkt $X \times Y$, wobei wir diesen Raum mittels $(x_0, y_0) \in X \times Y$ punktieren.

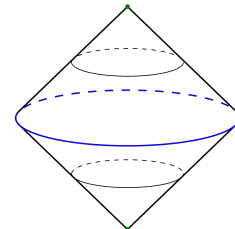
- Beispiel 13.70.** 1) $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$
 2) Die **Einhängung** eines topologischen Raumes ist ein Funktor

$$\Sigma : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top} .$$

gegeben durch

$$X \mapsto X \times [0, 1] / \begin{matrix} X \times \{0\} \\ X \times \{1\} \end{matrix} .$$

(genaugenommen wollen wir hier $(x, 0) \sim (x', 0)$ für $x, x' \in X$ und analog $(x, 1) \sim (x', 1)$ identifizieren). Für Details siehe z.B. [\[Hat02, Seite 8\]](#)



Grafik von [\[Mel\]](#)

Abbildung 23:
 Einhängung des
 Kreises C^1

- 5) Wir können die Funktorkategorie $\text{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ bilden, indem wir $\text{Ob}(\text{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$ als die Menge der Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} , und $\text{Mor}_{\text{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ als die Menge der natürlichen Transformationen von \mathcal{F} nach \mathcal{G} wählen.

14 Homotopien und die Fundamentalgruppen

Mündliche Anmerkung 14.1. Wir reden von nun an über 'Abbildungen', wobei wir damit meinen, dass jede Abbildung automatisch stetig ist.

Definition 14.2 (Homotopie). Zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, falls es eine Abbildung

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y.$$

gibt mit

$$H_0 := H(-, 0) = f \quad H_1 := H(-, 1) = g.$$

Die Abbildung H nennen wir dann **Homotopie**.

Notation 14.3. Wir notieren von nun an $I := [0, 1]$ als das Einheitsintervall.

Notation* 14.4. Da wir uns das Intervall $[0, 1]$ als einen zeitlichen Verlauf vorstellen wollen, über dem wir f nach g homotopieren, bietet sich allgemein die Notation $H_t := H(-, t) := X \xrightarrow{x \mapsto (x, t)} X \times [0, 1] \xrightarrow{H} Y$ an, um 'die' Abbildung zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ zu notieren.

Sollte es sich bei X um das Intervall $[0, 1]$ handeln, d.h. $f, g: [0, 1] \rightarrow Y$ sind Wege in Y , so parametrisieren wir diese Wege üblicherweise mit s . Für Wege w_1, w_2 ist dann zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$

$$H_t := H(-, t): \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow Y \\ s \longmapsto H(s, t) \end{array}$$

ein Weg in Y , wobei $H_0 = w_1$ und $H_1 = w_2$.

In der Vorlesung wird das nicht immer so gehandhabt und teilweise gewechselt, was ich persönlich verwirrend finde. Ich bemühe mich daher, einheitlich $H(s, t)$ zu verwenden und hierzu wenn nötig s, t bezüglich der Vorlesungsmitschrift zu vertauschen, damit dieses Skript einheitlich wird. Das hat den Vorteil, dass t im Kontext von Homotopien immer die Abbildungen $X \rightarrow Y$ parametrisiert, bzw. die Notation H_t die richtige ist, und - sollte es sich um Wege handeln, die wir homotopieren - s als Parameter für das Durchlaufen eines Weges verwendet wird.

Lemma 14.5. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf $\text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y)$.

Beweis. Reflexivität Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig, so auch $H: X \times I \xrightarrow{\text{pr}_X} X \xrightarrow{f} Y$ und klarerweise ist $H_0 = H_1 = f$.

Symmetrie Ist $H: X \times I \rightarrow Y$ stetig, so auch

$$H': X \times I \xrightarrow{(\text{id}, 1-t)} X \times I \longrightarrow Y.$$

Transitivität Sind $H, G: X \times I \rightarrow Y$ stetig und $H_1 = G_0$, so ist auch die Abbildung

$$HG: \begin{cases} X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x, t) & \longmapsto & \begin{cases} H(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

und wir prüfen leicht $(HG)_0 = H_0$ sowie $(HG)_1 = G_1$. □

Definition 14.6 (Homotop relativ einer Menge). i) Zwei punktierte Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ heißen (punktiert) **homotop**, falls es eine Abbildung

$$H: X \times I \rightarrow Y.$$

mit $H_0 = g, H_1 = f$ gibt, und zusätzlich $H_t(x_0) = y_0 \forall t \in I$ (wir lassen also den Basispunkt zu jedem Zeitpunkt fest).

ii) Sei $A \subseteq X$ und $f, g: X \rightarrow Y$. Die Abbildungen f, g heißen **homotop relativ A** , falls es

$$H: X \times I \rightarrow Y.$$

mit $H_0 = g, H_1 = f$ und $H(a, t) = H(a, t')$ für alle $a \in A, t \in I$ gibt (d.h. die Homotopie bleibt auf A konstant). Insbesondere gilt dies nur, wenn $f|_A = g|_A$

Definition 14.7 (Homotopiekategorie). Die (**naive**) **Homotopiekategorie \mathbf{hTop}** ist die Kategorie mit $\text{Ob}(\mathbf{hTop}) = \text{Ob}(\mathbf{Top})$ und

$$\text{Mor}_{\mathbf{hTop}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathbf{Top}}(X, Y) / \sim$$

d.h. wir identifizieren Abbildungen modulo Homotopie.

Beweis. Übung. Einige Wohldefiniertheiten müssen geprüft werden. □

Definition 14.8 (Homotopieäquivalenz). a) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **Homotopieäquivalenz**, falls $[f]$ ein Isomorphismus in \mathbf{hTop} ist, d.h. falls es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$ jeweils homotop zu den Identitäten sind.

b) Existiert eine Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$, so heißen X und Y **homotopieäquivalent**.

Beispiel 14.9. Der Einpunktraum $\{\star\}$ ist homotopieäquivalent zu \mathbb{R}^n mittels

$$f: \begin{cases} \{\star\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \star & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \{\star\} \\ x \longmapsto \star \end{array}$$

Hierbei ist $g \circ f = \text{id}_{\{\star\}}$ sowieso schon die Identität, und es ist $f \circ g = \mathcal{C}_0$ (die konstante Nullabbildung). Mittels

$$H : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) \longmapsto tx \end{array}$$

erhalten wir auch $H_0 = \mathcal{C}_0$ und $H_1 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, sodass wir eine Homotopie $\mathcal{C}_0 \sim \text{id}$ gefunden haben.

Lemma 14.10. Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Isomorphie in einer Kategorie ist eine Äquivalenzrelation. □

Notation 14.11. Wir bezeichnen

$$[X, Y] := \text{Mor}_{\text{Top}}(X, Y) / \sim = \text{Mor}_{\text{hTop}}(X, y).$$

und analog

$$[X, Y]_{\star} := [(X, x_0), (Y, y_0)] := \text{Mor}_{\text{Top}_{\star}}(X, Y) / \sim .$$

Bemerkung* 14.12. Für die Notation $[X, Y]_{\star}$ bzw. $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ definieren wir \sim natürlich wie in Teil i) von **Definition 14.6**, d.h. wir lassen nur punktierte Homotopie zu, wie man das in der Kategorie der punktierten topologischen Räume auch erwartet.

Definition 14.13 (Schleife). Eine **Schleife in X an $x \in X$** ist eine Abbildung $w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = w(1) = x$.

Äquivalent ist w eine Schleife, wenn $w \in \text{Mor}_{\text{Top}_{\star}}((S^1, 1), (X, x_0))$, indem wir **Theorem 3.9** anwenden.

Definition 14.14 (Komposition von Schleifen). Für zwei Schleifen w, w' in X an x ist $w \star w'$ die Schleife mit

$$(w \star w')(t) = \begin{cases} w(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w'(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Satz 14.15. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann definiert \star eine Gruppenstruktur auf $[S^1, (X, x_0)]_{\star}$.

Beweis. Als erstes zeigen wir wohldefiniertheit auf den Homotopieklassen, d.h. Wenn wir w, w' bis auf Homotopie ändern, so ist auch deren Komposition bis auf Homotopie stets gleich. Seien hierzu

$$H, G: [0, 1] / \{0, 1\} \times I \rightarrow X.$$

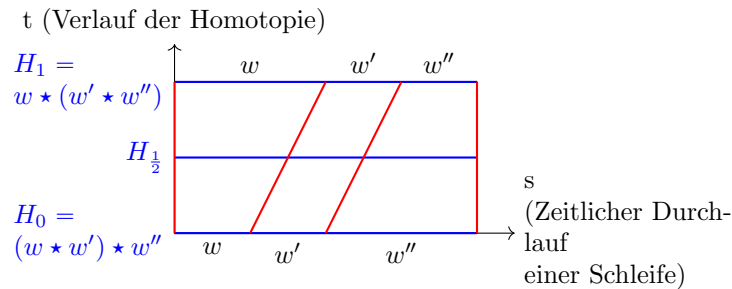
punktierte Homotopien. Dann setzen wir

$$(H \star G)(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

und sehen sofort allgemein $(H \star G)_t = H_s \star G_t$, weswegen wir also eine Homotopie zwischen $(H \star G)_0 = H_0 \star G_0$ und $(H \star G)_1 = H_1 \star G_1$ definiert haben.

Man beachte, dass wir für die Wohldefiniertheit $H(1, t) = H_t(1) = x_0 = G_t(0) = G(0, t)$ benötigen (an der Übergangsstelle $s = \frac{1}{2}$ müssen die beiden Fälle übereinstimmen).

Assoziativität Sind w, w', w'' drei Schleifen an x_0 , so durchlaufen wir bei der Schleife $(w \star w') \star w''$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ den Weg $w \circ w'$ und auf $[\frac{1}{2}, 1]$ w'' . Für $w \star (w' \star w'')$ passiert zwar eigentlich das Gleiche, allerdings in anderen Zeitintervallen, weswegen wir diese Zeitintervalle mittels einer Homotopie verschieben:



Dazu durchlaufen wir mit H_t (also zum Zeitpunkt t der Homotopie) w auf dem Intervall $s \in [0, \frac{1+t}{4}]$, den Weg w' auf $[\frac{1+t}{4}, \frac{2+t}{4}]$ und den Weg w'' auf $[\frac{2+t}{4}, 1]$, formal also folgendermaßen:

$$H(s, t) = \begin{cases} w\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ w'(4s - 1 - t) & \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ w''\left(\frac{4s - 2 - t}{2 - t}\right) & \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Man prüft an den Übergängen zwischen den Wegen wieder leicht, dass für $s = \frac{1+t}{4}$ und $s = \frac{2+t}{4}$ jeweils $H(s, t) = w(1) = x_0 = w'(0)$ bzw. $H(s, t) = w'(1) = x_0 = w''(0)$ gilt, in obiger Skizze sind die rot markierten Strecken diejenigen, auf denen $H(s, t)$ den Wert x_0 (zwingend) annimmt, weil es sich um Schleifenanfänge bzw. Enden handelt.

neutrales Element Sei $c: I \rightarrow X$ die Abbildung, die konstant x_0 ist. Wir behaupten, dass c ein neutrales Element ist. Sei hierzu w eine beliebige Schleife an x , dann ist

$$H(s, t) = \begin{cases} w\left(\frac{2s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ x_0 & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

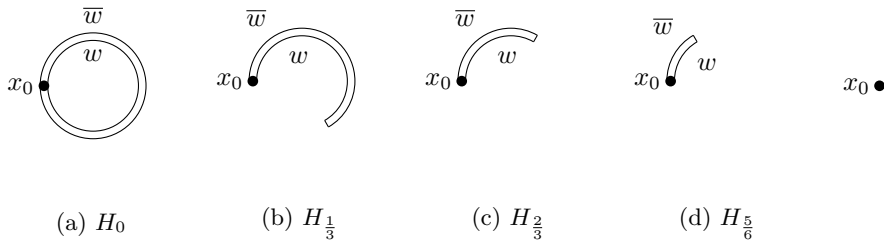


Abbildung 24: Illustration der Homotopie von $w \star \bar{w}$ zu c mit dem 'Spaghetti-Trick'

eine Homotopie von $w \star c$ nach w . Die Abbildung H_t durchläuft hierzu auf $[0, \frac{1+t}{2}]$ den Weg w , und bleibt für den Rest der Zeit stehen.

Bemerkung* 14.16. Wir müssen eigentlich noch zeigen, dass auch $c \star w$ zu w homotop ist, damit c ein beidseitiges neutrales Element ist, dazu ergibt sich jedoch völlig analog die Homotopie

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ w\left(\frac{2s-t}{2-t}\right) & \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

von w nach $c \star w$. H_t bleibt zunächst stehen, und durchläuft dann auf $[\frac{t}{2}, 1]$ den Weg w .

Inverses Sei $\bar{w}(t) = w(1-t)$, wir behaupten, dass diese Schleife ein Inverses darstellt. Dann ist

$$H(s, t) = \begin{cases} w(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ w(1-t) & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ w(2-2s) = \bar{w}(2s-1) & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

eine Homotopie von $w \star \bar{w}$ nach c . Hierbei laufen wir mit H_t zunächst auf $[0, \frac{1-t}{2}]$ einen Teil von w entlang (in normaler Geschwindigkeit), dann bleiben wir stehen (an der Stelle $w(1-t)$) und laufen dann im Zeitraum $[\frac{1+t}{2}, 1]$ wieder zurück, also ein Endstück von \bar{w} .

□

Mündliche Anmerkung 14.17. Man erkennt, dass es für obigen Beweis wichtig war, dass wir die Verknüpfung nur bis auf Homotopie definieren, weil wir ansonsten Probleme mit der Parametrisierung bekommen.

Definition 14.18 (Fundamentalgruppe). Für $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$ ist

$$\pi_1(X, x_0) := ([S^1, 1], (X, x_0)]_{\star, \star}.$$

die **Fundamentalgruppe** von X an x_0 .

Mündliche Anmerkung 14.19. Wir werden feststellen, dass es sich bei obigem um eine Homotopieinvariante handelt, mit der wir eine weitere charakteristische Eigenschaft von topologischen Räumen gefunden haben, um diese zu unterscheiden.

Allerdings wird sich herausstellen, dass die Berechnung solcher Gruppen recht mühsam ist, weswegen wir noch die Technik sogenannter *Überlagerungen* kennenlernen werden.

Satz 14.20. Ist $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung, so induziert diese einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f)=:f_*} \pi_1(Y, y_0).$$

mittels $[w] \mapsto [f \circ w]$. Zudem ist

$$\pi_1: \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}.$$

ein Funktor.

Beweis. Wohldefiniertheit Ist $w \stackrel{H}{\sim} w'$, so ist $f \circ w \stackrel{f \circ H}{\sim} f \circ w'$.

Gruppenhomomorphismus Seien $[w], [w']$ zwei beliebige Element aus $\pi_1(X, x_0)$, dann ist

$$\begin{aligned} \pi_1(f)([w] \star [w']) &= \pi_1(f)([w \star w']) \\ &= [f \circ (w \star w')] \\ &\stackrel{(1)}{=} [(f \circ w) \star (f \circ w')] \\ &= [f \circ w] \star [f \circ w'] \\ &= \pi_1(f)([w]) \circ \pi_1(f)([w']) \end{aligned}$$

wobei in (1) Gleichheit gilt, weil es sich bei beiden Seiten um die Abbildung

$$\begin{cases} (f \circ w)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f \circ w')(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

handelt.

Funktorialität • Es ist $\pi_1(\text{id}_X)[w] = [\text{id}_X \circ w] = [w]$, also bilden wir Identitäten auf Identitäten ab.

- Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \pi_1(f \circ g)([w]) &= [(f \circ g) \circ w] \\ &= [f \circ (g \circ w)] \\ &= \pi_1(f)[g \circ w] \\ &= \pi_1(f)(\pi_1(g)[w]) \\ &= (\pi_1(f) \circ \pi_1(g))[w] \end{aligned}$$

und wir erhalten, dass $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.

□

Mündliche Anmerkung 14.21. Wir können uns π_1 vorstellen als 'Löcherzählen', dazu später mehr.

Vorlesung 14
Do 10 Jun 2021

Satz 14.22 (π_1 auf Wegzusammenhangskomponenten). Seien $x, x' \in X$ durch einen Weg verbunden, d.h. $\exists w: I \rightarrow X$ mit $w(0) = x, w(1) = x'$. Dann sind die Gruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, x')$ homöomorph.

Bemerkung 14.23. Liegen x, x' in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten, so gibt es (im Allgemeinen) keine Beziehung zwischen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, x')$. Betrachte hierzu z.B. $X = X_1 \coprod X_2$ mit $x \in X_1$ und $x' \in X_2$, so ist $\pi_1(X, x) = \pi_1(X_1, x)$ und $\pi_1(X, x') = \pi_1(X_2, x')$. Es genügt daher zu sehen, dass es Räume mit verschiedenen Fundamentalgruppen gibt.

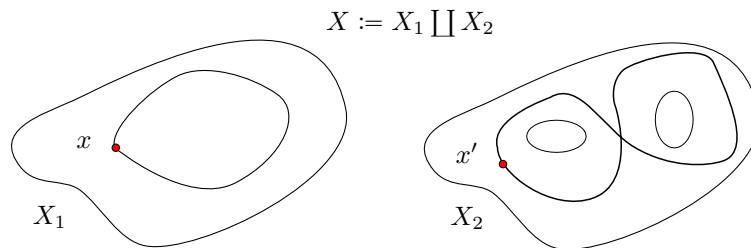


Abbildung 25: Disjunkte Vereinigung von Räumen mit verschiedener Fundamentalgruppe

Beweis von Theorem 14.22. Sei $v: I \rightarrow X$ eine Weg von x nach x' . Dann definiere

$$v_* : \begin{cases} \pi_1(X, x') & \longrightarrow & (X, x) \\ [w] & \longmapsto & [v \star w \star \bar{v}] \end{cases}$$

wobei wie üblich $\bar{v}: [0, 1] \rightarrow X$ gegeben ist durch $\bar{v}(t) = v(1 - t)$. Hierbei definieren wir

$$(v \star w \star \bar{v})(t) = \begin{cases} v(3t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ w(3t - 1) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ v(3(1 - t)) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Damit diese Konstruktion ein Gruppenisomorphismus ist, zeigen wir:

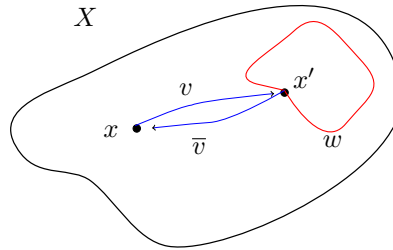


Abbildung 26: Aus einer Schleife w um x' können wir mittels v, \bar{v} eine Schleife um x erzeugen

Wohldefiniertheit Für $w \stackrel{H}{\sim} w'$ ist auch $v \star w \star \bar{v} \sim v \star w' \star \bar{v}$ mittels der Homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} v(3t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ H(3t - 1, s) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ v(3(1-t)) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Gruppenhomomorphismus Es ist:

$$\begin{aligned} v \star (w \star w') \star \bar{v} &\stackrel{\bar{v} \star v \sim c_{x'}}{=} v \star (w \star (\bar{v} \star v) \star w') \star \bar{v} \\ &\stackrel{\text{assoz.}}{=} (v \star w \star \bar{v}) \star (v \star w' \star \bar{v}) \\ &= v_*(w) \circ v_*(w') \end{aligned}$$

Isomorphismus \bar{v} induziert analog zu v eine Abbildung

$$\bar{v}_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x').$$

Wir behaupten, dass \bar{v}_* ein Inverses ist, also $v_* \circ \bar{v}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}$, dann folgt wegen $\bar{v} = v$ auch sofort $\bar{v}_* \circ v_* = \text{id}_{\pi_1(X, x')}$.

Sei also $[w] \in \pi_1(X, x)$, dann ist

$$\begin{aligned} (v_* \circ \bar{v}_*)([w]) &= [v \star \bar{v} \star w \star v \star \bar{v}] \\ &= [w] \end{aligned}$$

also ist $v_* \circ \bar{v}_*$ tatsächlich die Identität. □

Warnung. Der Isomorphismus $v_* : \pi_1(X, x') \rightarrow \pi_1(X, x)$ hängt von v ab (genauer von der Homotopieklasse von v relativ Endpunkten). Die Gruppen sind aber in jedem Fall isomorph.

Ist G eine Gruppe, $g \in G$, so ist

$$c_g : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ h & \longmapsto ghg^{-1} \end{cases}$$

eine Automorphismus von G , die **Konjugation mit g** . Diese heißen **innere Automorphismen**

Bemerkung 14.24. Sind $v, v' : I \rightarrow X$ Wege von x nach x' , dann gilt:

$$\begin{aligned} v_*([w]) &= v \star [w] \star \bar{v} \\ &= [v \star \bar{v}'] \star v'_*([w]) \star [v' \star \bar{v}] \\ &= c_{[v \star \bar{v}']}(v'_*[w]) \end{aligned}$$

die von verschiedenen Wegen v, v' von x nach x' induzierter Wege unterscheiden sich also nur um Konjugation.

Bemerkung* 14.25. Es gibt auch Wege $v, w : x' \rightarrow x$, die nicht in der gleichen Homotopieklasse (relativ Endpunkten) liegen, die aber dennoch denselben Isomorphismus induzieren. Das liegt daran, dass die beiden induzierten Isomorphismen sich nur um Konjugation unterscheiden (s. **Bemerkung 14.24**), und damit z.B. insbesondere für abelsche Fundamentalgruppen denselben Isomorphismus induzieren.

Mündliche Anmerkung 14.26. Man muss aufpassen, bei wegzusammenhängenden Räumen einfach von 'der' Fundamentalgruppe zu sprechen. Es gibt zwar nur eine, allerdings sind die Isomorphismen nicht zwingend kanonisch, weswegen man trotzdem implizit noch die Wahl des Basispunktes mit sich rumschleppt. Das motiviert die Betrachtung der nächsten Definition:

Definition 14.27 (Fundamentalgruppoid). Der **Fundamentalgruppoid** $\Pi(X)$ ist die Kategorie mit $\text{ob}(\Pi(X)) = X$ und

$$\text{Mor}_{\Pi(X)}(x, x') = \{w : I \rightarrow X \mid w(0) = x, w(1) = x'\} / \sim \text{ rel } \{0, 1\}.$$

d.h. die Morphismen sind genau die Wege von x nach x' modulo Homotopie bezüglich Endpunkten. Die Verknüpfung der Morphismen ist durch \star gegeben.

Bemerkung* 14.28. 1) Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist, d.h. in der jedere Morphismus ein Isomorphismus ist. In obigem Fall ist das gegeben, weil wir für w den Weg \bar{w} als Inverses

haben.

Warnung. Wir fordern nicht, dass zwischen je zwei Objekten ein Isomorphismus existiert. Das ist auch in $\Pi(X)$ nicht der Fall, wenn X nicht wegzusammenhängend ist.

Ist \mathcal{G} ein Gruppoid, so ist $\text{Mor}_{\mathcal{G}}(A, A)$ für $A \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ stets eine Gruppe. Vergleiche hierzu auch **Beispiel 13.67 1**).

2) Per Definition ist $\text{Mor}_{\Pi(X)}(x, x) \cong \pi_1(X, x)$ (als Gruppen).

3) Per Definition ist nun

$$\pi_0(X) \cong \text{Ob}(\Pi(X)) / \text{Isomorphie}$$

Mündliche Anmerkung 14.29. Obige Konstruktion ist funktoriell (Zuordnung $X \rightarrow \Pi(X)$). Dadurch 'verpacken' wir die Basispunktwahl in eine Kategorie und umgehen so willkürliche Wahlen, können die Informationen aus der Kategorie (über die Fundamentalgruppe) aber jederzeit 'zurückgewinnen' (bzw. haben sie schon).

15 Überlagerungen Teil 1

Definition 15.1 (Überlagerung). Eine **Überlagerung** ist eine stetige, surjektive Abbildung

$$p: E \rightarrow X.$$

mit den folgenden Eigenschaften: Für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U von x , einen diskreten Raum F und einen Homöomorphismus

$$v: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F.$$

über U , d.h.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{v} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow p|_U \\ & U & \end{array}$$

Bemerkung 15.2. F ist homöomorph zu $F_x = p^{-1}(\{x\})$, der **Faser über x** mittels

$$v|_{p^{-1}(x)}: p^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times F.$$

Lemma 15.3 (Überlagerung von Teilräumen). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung,

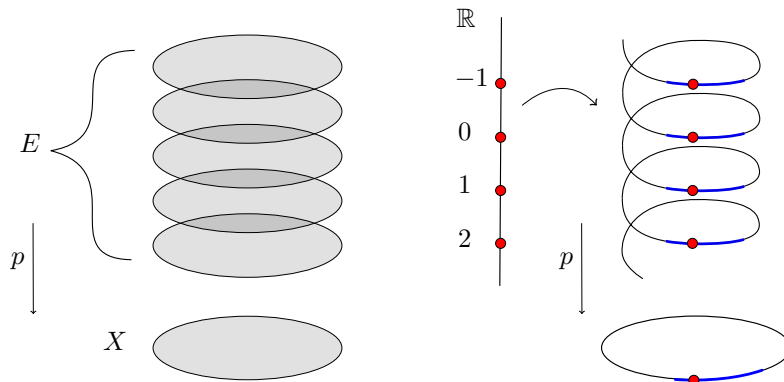


Abbildung 27: Veranschaulichung einer trivialen Überlagerung (links), und der Überlagerung $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$

$Y \subseteq X$ ein Teilraum. Dann ist auch

$$p|_{p^{-1}(Y)}: p^{-1}(Y) \rightarrow Y.$$

eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in Y$. Dann $\exists U \subseteq X$ Umgebung von x und F diskret und ein Homöomorphismus

$$v: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F.$$

über U . Dann ist $U \cap Y$ eine umgebung von x in Y und somit

$$v|_{p^{-1}(U \cap Y)}: p^{-1}(U \cap Y) \rightarrow (U \cap Y) \times F.$$

ein Homöomorphismus. □

Beispiel 15.4. Sei X ein topologischer Raum, F diskret. Dann ist

$$\text{pr}_X: X \times F \rightarrow X.$$

eine Überlagerung.

Bemerkung 15.5. Ist $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, so heißt diese **trivial**, falls ein Homöomorphismus $u: E \rightarrow X \times F$ über X existiert, wobei F diskret.

Definition 15.6. $f: X \rightarrow Y$ ist ein **lokaler Homöomorphismus**, falls $\forall x \in X$ eine offene Umgebung $x \in V \subseteq X$ existiert mit

- i) $f(V) \subseteq Y$ ist offen
- ii) $f|_V: V \rightarrow f(V)$ ist ein Homöomorphismus

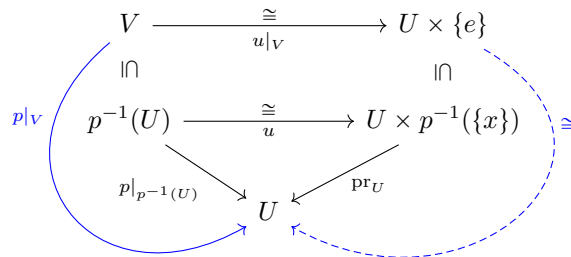
Mündliche Anmerkung 15.7. Die Abbildung $f|_V \rightarrow f(V)$ erfüllt etwas stärkere Eigenschaften als eine **Einbettung**, weil wir hier zusätzlich fordern, dass $f(V) \subseteq Y$ offen ist.

Es ist z.B. $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ eine Einbettung, jedoch kein lokaler Homöomorphismus.

Lemma 15.8. Eine Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.

Beweis. Sei $p: E \rightarrow X$ eine beliebige Überlagerung. Für $x \in X$ existiert $x \in U \subseteq X$ offen mit $u: p^{-1}(U) \cong U \times p^{-1}(\{x\})$ (per Definition der Überlagerung)

Sei nun $e \in E$ beliebig und setze $x = p(e)$. Wähle $V = u^{-1}(U \times \{e\})$. Dann ist $p|_V: V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus, denn (nach Anwendung von u bzw. $u|_V$) für $U \times \{e\} \rightarrow U$ ist dies trivial.



Da $p^{-1}(U) \subseteq E$ offen ist (Stetigkeit von p) und

$$V \cong U \times \{e\} \subseteq U \times p^{-1}(\{x\}) \xrightarrow{u^{-1}} p^{-1}(U)$$

offen, ist $V \subseteq p^{-1}(U) \subseteq E$ offen. Also ist V eine offene Umgebung von e , und $p|_V: V \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus mit offenem Bild $U \subseteq X$, und wir erfüllen alle Eigenschaften eines lokalen Homöomorphismus. \square

Lemma 15.9. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X , so dass gilt:

Für alle $i \in I$, $x \in U_i$ und $y \in p^{-1}(x)$ gibt es eine stetige Funktion $s: U_i \hookrightarrow E$ mit

- $s(x) = y$

- $p \circ s = \text{id}_{U_i}$

Mündliche Anmerkung 15.10. Im Wesentlichen passiert hier nicht viel mehr als beim lokalen Homöomorphismus. Der Unterschied der Aussage des Lemmas ist, dass wir hier die U_i und das y fest wählen können, und erst dann den Homöomorphismus bauen.

Beweis von Lemma 15.9. Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x , auf der p trivial ist (im Wesentlichen die Definition einer Überlagerung). Dann ist $\{U_x\}_{x \in X}$ eine offene Überdeckung, die die Eigenschaften des Lemmas erfüllt:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xleftarrow{\cong} & p^{-1}(U_x) \xrightarrow[\cong]{v} U_x \times F \\
 & \searrow s & \uparrow \\
 & & U_x \xrightarrow[\cong]{} U_x \times \{f\}
 \end{array}$$

s als Verknüpfung der anderen Abbildungen hat nämlich genau die gewünschten Eigenschaften, sofern wir f natürlich so wählen, dass $y \stackrel{v}{\leftrightarrow} (x, f)$ in Bijektion stehen. \square

Bemerkung 15.11. Nicht jeder lokale Homöomorphismus ist eine Überlagerung. Die Abbildung $(0, 2) \xrightarrow{\text{exp}} S^1$ ist ein lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung.

Das 'Problem' ist hierbei, dass $1 \in S^1$ nur ein Urbild unter exp hat, jede Umgebung von $1 \in (0, 2)$ im Urbild ist jedoch drei Urbilder von den Punkten nahe 1, ist also nicht einfach nur ein Intervall.

Notation 15.12. Ist $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, so nennen wir

- X die **Basis** oder den **Basisraum**
- E den **Totalraum**
- p die **Überlagerungsabbildung** oder **Überlagerungsprojektion**
- $p^{-1}(x)$ die **Faser über x** , F_x
- $|p^{-1}(x)|$ die **Blätterzahl**. Diese ist lokal konstant.

Beispiel 15.13. 1) Die triviale Überlagerung

2) Die unendlich-blättrige Überlagerung

$$\text{exp} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow S^1 \\ t & \longmapsto e^{2\pi i t} \end{cases}$$

3) Es gibt auch eine k -blättrige Überlagerung des Einheitskreises:

$$()^k : \begin{cases} S^1 & \longrightarrow S^1 \\ z & \longmapsto z^k \end{cases}$$

(wir fassen hier $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ auf, um z^k zu definieren).

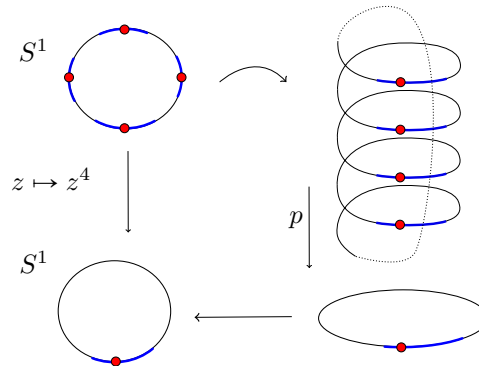


Abbildung 28: 4-blättrige Überlagerung $S^1 \rightarrow S^1$

4) Sind $E, E' \xrightarrow{p, p'} X$ Überlagerungen, so auch

$$E \amalg E' \xrightarrow{p \amalg p'} X.$$

5) Die Projektion $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^n \cong S^n / x \sim -x$ ist eine 2-blättrige Überlagerung. Bezeichne hierzu mit N, S den Nord- und den Südpol von S^n (die den gleichen Punkt in $\mathbb{R}P^n$ darstellen und wegen Symmetrie ein generischer Punkt aus $\mathbb{R}P^n$ sind). Dann können wir die offene ober bzw. untere Halbkugel betrachten, d.h.

$$\begin{aligned} S^n \cap \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} > 0\} \\ S^n \cap \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} < 0\} \end{aligned}$$

deren Projektion auf $\mathbb{R}P^n$ dann genau eine 2-blättrige triviale Überlagerung auf eine offene Umgebung von $p(N) = p(S)$ darstellt.

Mündliche Anmerkung 15.14. Man kann zeigen, dass die endlichen Überlagerungen die einzigen *zusammenhängenden* Überlagerungen von S^1 sind. Für 'schöne' Räume werden wir diese auch noch klassifizieren.

In der nächsten Woche behandeln wir *Liftungssätze*, d.h. wir fragen uns

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \exists \tilde{f}? & \downarrow p \\ T & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

das ganze gilt z.B. für Wege, also wenn $T = I$, wir können uns dann ein Urbild $e \mapsto f(0) = x$ wählen und erhalten \tilde{f} mit $\tilde{f}(0) = e$, sodass obiges kommutiert.

Mündliche Anmerkung 15.15 (ca.). Wir werden dann feststellen, dass die Hebung von $w: I \rightarrow X$ nicht zwingend eine Schleife ist, auch wenn w es war. Wenn wir dann auch noch Homotopien heben können, so können wir schließen, dass w nicht nullhomotop war, weil das sonst auch für den gehobenen Weg gelten müsste, dieser aber nichtmal dieselben Endpunkte hat.

Vorlesung 15
Di 15 Jun 2021

Satz 15.16 (Weghebungssatz). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, und $w: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit Anfangspunkt $x_0 := w(0)$. Sei $y \in p^{-1}(x_0)$ (also ein Punkt in der Faser von x_0). Dann existiert genau ein Weg $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow E$, sodass $\tilde{w}(0) = y$ und $p \circ \tilde{w} = w$, d.h. es kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{w} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{w} & X \end{array}$$

Der Weg \tilde{w} heißt **Hebung** oder **Lift** von w .

Mündliche Anmerkung 15.17 (auf Nachfrage). Wir können uns den Endpunkt des Weges \tilde{w} , also $\tilde{w}(1)$, nicht aussuchen. Dieser ist aber eindeutig bestimmt durch die Wahl des Anfangspunktes $\tilde{w}(0) = y$.

Wir wissen also, dass dieser Endpunkt existiert und eindeutig bestimmt ist, können aber noch keine Aussage darüber treffen.

Zudem werden wir sehen, dass der Endpunkt nicht notwendigerweise der Anfangspunkt sein wird, selbst wenn es sich bei w um eine Schleife handelt.

Beweis. 1. Fall: Wir nehmen an, dass p trivial ist, d.h. wir finden F , sodass kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\cong} & X \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_X \\ & & X \end{array}$$

Wir müssen also zeigen, dass genau eine Hebung $\tilde{w}: I \rightarrow X \times F$ existiert mit $\tilde{w}(0) = u(y)$. Sei $u(y) = (x_0, f)$ mit $f \in F$. Wir definieren nun

$$\tilde{w}(t) = (w(t), f).$$

d.h. wir heben den Weg einfach nach $X \times \{f\} \cong X$. Dann ist $\tilde{w}(0) = (w(0), f) = (x_0, f) = u(y)$, und die Projektion ist genau

$$\text{pr}_X(\tilde{w}(t)) = w(t).$$

wie gewünscht.

Eindeutigkeit: Sei $\tilde{\tilde{w}}: I \rightarrow X \times F$ ein weiterer Lift mit Anfangspunkt $(w(0), f)$. Weil I zusammenhängend ist, ist $\text{pr}_F \circ \tilde{\tilde{w}}: I \rightarrow F$ konstant, weil das Bild zusammenhängend, F aber diskret ist. Also folgt bereits

$$\tilde{\tilde{w}}(t) = (w(t), f) = \tilde{w}(t).$$

, denn die zweite Komponente ergibt sich aus vorherigem Argument, und die erste dann sofort aus der Hebungseigenschaft.

2. Fall: w hat Bild in einer trivialisierenden Umgebung U , d.h. in $U \subseteq X$ mit $p|_{p^{-1}(U)}$ trivial.

Wir fassen w als Weg $I \rightarrow U$ auf. Nach Fall 1 existiert $\tilde{w}: I \rightarrow p^{-1}(U)$ mit $\tilde{w}(0) = y$. Dann ist $\tilde{w}: I \rightarrow p^{-1}(U) \hookrightarrow E$ eine Hebung von w entlang $p: E \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & E \\ & \searrow w & \downarrow p|_{p^{-1}(U)} & & \downarrow p \\ & & U & \longrightarrow & X \end{array}$$

Da jede Hebung Bild in $p^{-1}(U)$ hat (Verknüpfung mit p liefert ja einen Weg in U , nämlich w), folgt die Eindeutigkeit auch aus Fall 1.

3. Fall: Allgemeiner Fall. Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so dass $p|_{p^{-1}(U_i)}$ trivial ist für alle $i \in I$.

Dann ist $\{w^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von I . Es gibt also eine Lebesgue-Zahl $\varepsilon > 0$, d.h. ein $\varepsilon > 0$, sodass jeder ε -Ball $U(t, \varepsilon) \subseteq I$ in einem $w^{-1}(U_j)$ liegt. Also finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall k = 0, \dots, n-1 \exists i \in I: \quad \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subseteq w^{-1}(U_i)$$

d.h. analog, dass

$$w|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]}: \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \rightarrow X.$$

hat Bild in einer trivialisierenden Umgebung U_i .

Wir zeigen per Induktion, dass $w|_{\left[0, \frac{k}{n} \right]}: \left[0, \frac{k}{n} \right] \rightarrow X$ einen eindeutigen Lift \tilde{w} mit Anfangspunkt y hat.

IA: $k = 1$ ist genau die Aussage von Fall 2, wir sind also fertig.

IS Es gelte die Aussage für k . Sei $\tilde{w}: \left[0, \frac{k}{n} \right] \rightarrow E$ die eindeutige Hebung von $w|_{\left[0, \frac{k}{n} \right]}$ und setze $y_k := \tilde{w}\left(\frac{k}{n}\right)$. Nach Fall 2 hat also der Weg

$$w|_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]}: \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \rightarrow X.$$

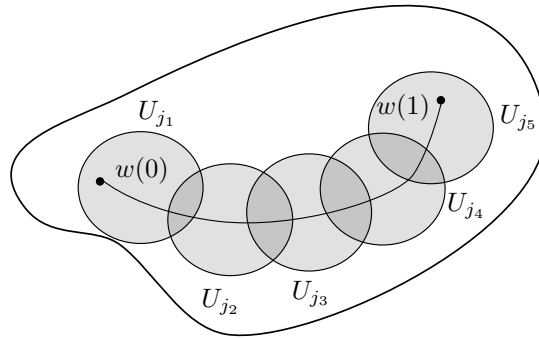


Abbildung 29: Zerlegung des Weges in trivialisierende Umgebungen, auf denen wir heben können

einen eindeutigen Lift \tilde{w}' mit $\tilde{w}'\left(\frac{k}{n}\right) = \tilde{w}\left(\frac{k}{n}\right)$. Nun passen \tilde{w} und \tilde{w}' zusammen zu einer Hebung

$$w|_{\left[0, \frac{k+1}{n}\right]}.$$

zusammen. Zudem ist diese Hebung eindeutig, denn das Anfangsstück auf $\left[0, \frac{k}{n}\right]$ ist nach Induktion schon eindeutig, also auch der Anfangspunkt y_k von \tilde{w}' , und somit auch \tilde{w}' nach Fall 2. \square

Bemerkung* 15.18. Das Lebesgue-Lemma fand sich auf den Übungsblättern als **Aufgabe 5.4**, wir geben dies im folgenden wieder:

Definition 15.19 (Lebesguezahl). Sei \mathcal{U} eine (offene) Überdeckung eines metrischen Raumes X . Dann ist eine $\varepsilon > 0$ eine **Lebesguezahl**, falls $\forall x \in X$ eine (offene) Umgebung $U \in \mathcal{U}$ mit $U(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Lemma 15.20 (Lebesgue-Lemma). Ist X ein kompakter metrischer Raum, \mathcal{U} eine offene Überdeckung. Dann existiert eine Lebesguezahl $\varepsilon > 0$.

Bemerkung* 15.21. Auf dem Übungsblatt haben wir das Lemma für einen *folgenkompakten* metrischen Raum gezeigt, und das ist auch die Eigenschaft, die wir im Beweis verwenden. Allerdings ist **Aufgabe 5.4** auch genau dazu da, zu zeigen, dass Folgenkompaktheit und Kompaktheit für metrische Räume äquivalent sind, in der Formulierung des Lebesgue-Lemmas ist dies also nicht (mehr) wichtig, sobald wir das wissen.

Bemerkung 15.22. Ist $w: I \rightarrow X$ eine Schleife, so ist \tilde{w} im Allgemeinen trotzdem keine Schleife, hierzu betrachte wieder die Überlagerung $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$ und die Schleife w , die einmal um den Kreis läuft, die Hebung ist in \mathbb{R} jedoch einfach ein Weg von k zu $k+1$.

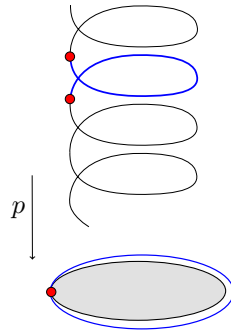


Abbildung 30: Hebung der Schleife in S^1 zu einem Weg in \mathbb{R}

Satz 15.23 (Homotopieliftungssatz). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, und seien $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1: I \rightarrow E$ Wege mit $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$, also gleichem Anfangspunkt. Sei $w_i = p \circ \tilde{w}_i$.

Sei $H: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von w_0 nach w_1 relativ Anfangspunkten.

- i) Es gibt eine eindeutige Hebung $\tilde{H}: I \times I \rightarrow E$ von H mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{w}_0(0)$.
- ii) \tilde{H} ist eine Homotopie von \tilde{w}_0 nach \tilde{w}_1 relativ Anfangspunkten.
- iii) Ist H eine Homotopie relativ Endpunkt, so auch \tilde{H} .

Beweis von Theorem 15.23. Existenz von \tilde{H} . Sei $\{U_k\}_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von X , so dass p über jedem U_k trivial ist. Dann ist $\{H^{-1}(U_k)\}_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von I^2 . Nach dem **Lebesgue-Lemma** existiert $m \in \mathbb{N}$, so dass jedes Quadrat

$$Q_{i,j} := \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right] \subseteq I^2.$$

in einem der $H^{-1}(U_k)$ liegt, für $i, j = 1, \dots, m$.

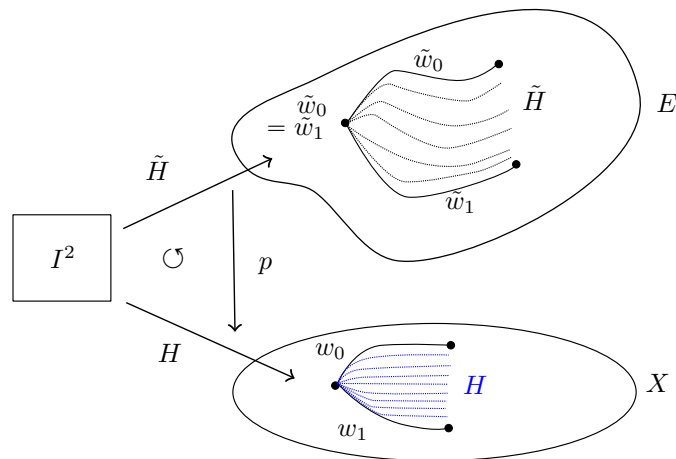


Abbildung 31: Hebung der Homotopie H in den Überlagerungsraum E

Q_{14}	Q_{24}	Q_{34}	Q_{44}
Q_{13}	Q_{23}	Q_{33}	Q_{43}
Q_{12}	Q_{22}	Q_{32}	Q_{42}
Q_{11}	Q_{21}	Q_{31}	Q_{41}

Bemerkung* 15.24 (teilweise mündlich). Genauer gesagt würden wir nach dem Lebesgue-Lemma ein δ erhalten, sodass jede offene Menge mit $\text{diam} < \delta$ in einem der U_i liegt. Aber natürlich können wir dann m groß genug machen, sodass ein abgeschlossenes Quadrat in einer etwas größeren offenen Menge liegt, die Durchmesser $< \delta$ hat.

Wir wollen im Folgenden eine Familie von stetigen Abbildungen $\tilde{H}_{ij}: Q_{ij} \rightarrow E$ konstruieren, die H lokal, d.h. auf Q_{ij} , heben und untereinander 'kompatibel' sind, genauer:

- i) $p \circ \tilde{H}_{ij} = H|_{Q_{ij}}$ (\tilde{H}_{ij} ist Hebung auf Q_{ij})
- ii) $\tilde{H}_{11}(0,0) = \tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$ (\tilde{H}_{11} hebt $w_0(0)$ auf $\tilde{w}_0(0)$)
- iii) $(\tilde{H}_{ij})|_{Q_{ij} \cap Q_{i'j'}} = (\tilde{H}_{i'j'})|_{Q_{ij} \cap Q_{i'j'}}$ (die lokalen Hebungen sind auf ihren Schnittmengen, d.h. den Rändern der Quadrate, identisch)

Dies führen wir rekursiv in der Reihenfolge $11, 12, \dots, 1m, 21, 22, \dots, 2m, \dots, 3m, \dots, mm$ durch, wobei wir in jedem Schritt obige Bedingungen sicherstellen, d.h. wir beweisen diese Aussagen parallel mittels Induktion.

Seien also $1 \leq i, j \leq m$ gegeben, sodass wir die vorherigen \tilde{H}_{ij} bereits definiert haben. Wir finden ein k , sodass $H(Q_{ij})$ in U_k liegt, über dem die Überlagerung trivial ist, also können wir eine lokale Umkehrfunktion $s: U \rightarrow E$ wählen, die zusätzlich den Startpunkt

$$s\left(H\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m}\right)\right) = \begin{cases} \tilde{w}_0(0) & i = j = 1 \\ \tilde{H}_{i-1,j}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m}\right) & i > 1 \\ \tilde{H}_{i,j-1}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m}\right) & j > 1 \end{cases} \quad (4)$$

besitzt, d.h. s hebt die 'linke untere Ecke' von $H(Q_{ij})$ auf den gleichen Punkt wie eine der vorherigen Abbildungen $\tilde{H}_{i',j'}$ (bzw. auf den Anfangspunkt $\tilde{w}_0(0)$, wenn wir die erste Abbildung definieren), damit die Abbildungen letztendlich zusammenpassen.

Bemerkung 15.25. Da $\tilde{H}_{i-1,j}$ und $\tilde{H}_{i,j-1}$ auf der Ecke $(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m})$ übereinstimmen, ist das wohldefiniert für $i, j > 1$. Dazu ist insbesondere wichtig, dass wir Eigenschaft iii) für $i-1, j$ und $i, j-1$ bereits induktiv annehmen können.

Mit dieser Umkehrabbildung setzen wir nun naheliegenderweise $\tilde{H}_{ij} := s \circ H|_{Q_{ij}}$. Wir müssen nun die Eigenschaften i) - iii) prüfen. i) ergibt sich unmittelbar aus der Wahl von s mittels

$$p \circ \tilde{H}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} p \circ (s \circ H|_{Q_{ij}}) = (p \circ s) \circ H|_{Q_{ij}} = \text{id}_{U_k} \circ H|_{Q_{ij}} = H|_{Q_{ij}}.$$

Eigenschaft ii) ergibt sich unmittelbar aus der Definition in Gleichung 4, Eigenschaft iii) müssen wir nur für das neu hinzugekommene \tilde{H}_{ij} zeigen, und auch nur für den Schnitt mit den (potenziell) benachbarten Quadraten links und unter Q_{ij} , weil die Schnitte sonst leer sind. Also bleibt zu zeigen:

Behauptung 16 (linker Rand von Q_{ij}). Ist $i > 1$, so ist $\tilde{H}_{ij}|_{Q_{ij} \cap Q_{i-1,j}} = \tilde{H}_{i-1,j}|_{Q_{ij} \cap Q_{i-1,j}}$.

Unterbeweis. Es ist $Q_{ij} \cap Q_{i-1,j} = \{\frac{i-1}{m}\} \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ und kann somit durch

$$t \mapsto \left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1+t}{m}\right).$$

für $t \in [0, 1]$ parametrisiert werden.

Die entsprechenden Wege

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{H}_{ij}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1+t}{m}\right) \\ t &\mapsto \tilde{H}_{i-1,j}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1+t}{m}\right) \end{aligned}$$

heben also den Weg $t \mapsto H\left(\frac{i-1+t}{m}, \frac{j-1+t}{m}\right)$ und stimmen für $t = 0$ am Wert

$$\tilde{H}_{ij}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H}_{i-1,j}\left(\frac{i-1}{m}, \frac{j-1}{m}\right).$$

überein (vergleiche auch wieder Gleichung 4). Nach dem Weghebungssatz sind also beide Wege gleich, also stimmen $\tilde{H}_{ij}, \tilde{H}_{i-1,j}$ entsprechend überein. ■

Behauptung 17 (unterer Rand von Q_{ij}). Ist $j > 1$, so ist $\tilde{H}_{ij}|_{Q_{ij} \cap Q_{i,j-1}} = \tilde{H}_{i,j-1}|_{Q_{ij} \cap Q_{i,j-1}}$

Unterbeweis. Völlig analog zu Behauptung 1, der Schnitt ist der untere Rand von Q_{ij} und kann analog parametrisiert werden. ■

Damit haben wir zusammen eine Abbildung \tilde{H}_{ij} mit den geforderten Eigenschaften i) - iii) konstruiert. Es ist nun leicht zu prüfen, dass wir die \tilde{H}_{ij} zu einer Abbildung

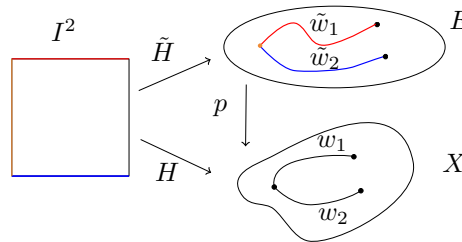
$$\tilde{H} : \begin{cases} I^2 & \longrightarrow E \\ (x, y) & \longmapsto \tilde{H}_{ij}(x, y), \text{ wobei } i, j \text{ so, dass } (x, y) \in Q_{ij} \end{cases}$$

zusammenfügen können, die die geforderten Eigenschaften besitzt.

Eindeutigkeit Sei \tilde{H} eine weitere Hebung mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{w}_0(0)$. Sei $(t, s) \in I^2$ und w ein Weg von $(0, 0)$ nach (t, s) in I^2 (z.B. der lineare Weg). Dann sind $\tilde{H} \circ w$ und $\tilde{H} \circ w$ Hebungen von $H \circ w$ mit demselben Anfangspunkt.

Nach der Eindeutigkeit im **Weghebungssatz** sind also auch schon $\tilde{H} \circ w$ und $\tilde{H} \circ w$ gleich, insbonders stimmen sie an (t, s) überein, und somit $\tilde{H}(t, s) = \tilde{H}(t, s)$. Da $(t, s) \in I^2$ beliebig war, folgt also wie gewünscht $\tilde{H} = \tilde{H}$.

- ii) Der Weg $\tilde{H}(-, 0)$ hebt $H(-, 0) = w_0$ mit Anfangspunkt $\tilde{w}_0(0)$. Auch \tilde{w}_0 ist ein solcher Lift. Aus der Eindeutigkeit im **Weghebungssatz** folgt also genau $\tilde{H}(-, 0) = \tilde{w}_0$. $\tilde{H}(-, 0)$ ist in folgender Skizze blau markiert. Bevor wir jedoch etwas über $\tilde{H}(-, 1)$ aussagen können, müssen wir erst noch über die linke Kante von I^2 etwas lernen (im Bild orange).



Weiter hebt $\tilde{H}(0, -)$ den Weg $H(0, -) = c_{w_0(0)}$, weil H eine Homotopie relativ Anfangspunkt ist. Auch $c_{\tilde{w}_0(0)}$ ist eine solche Hebung (mit gleichem Anfangspunkt), also ist bereits $\tilde{H}(0, -) = c_{\tilde{w}_0(0)}$.

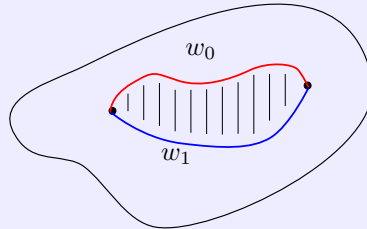
Damit folgt bereits, dass \tilde{H} eine Homotopie relativ Anfangspunkt ist, und dass $\tilde{H}(0, 1) = c_{\tilde{w}_0(0)}$. Also hebt der Weg $\tilde{H}(-, 1)$ den Weg $H(-, 1) = w_1$ mit Anfangspunkt $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$, und wegen der Eindeutigkeit der Wegeliftung erhalten wir wie gewünscht $\tilde{H}(-, 1) = \tilde{w}_1$.

- iii) Der Weg $\tilde{H}(1, -)$ hebt nun $H(1, -)$. Ist $H(1, -)$ konstant, dann auch $\tilde{H}(1, -)$, weil wir auch die konstante Hebung haben, und die Hebung eindeutig ist.

□

16 Beispiele für π_1

Definition 16.1. Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls X wegzusammenhängend ist und je zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind (relativ Anfangs- und Endpunkt).



Lemma 16.2. Ein Raum X ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x)$ trivial ist für ein (oder äquivalent alle) $x \in X$.

Beweis. ' \implies ' Spezialfall der Definition.

' \impliedby ' Seien $w, w': I \rightarrow X$ Wege mit $w(0) = w'(0) = x$ und $w(1) = w'(1) = y$. Dann ist

$$w \simeq (w' \star \overline{w'}) \star w \simeq w' \star (\overline{w'} \star w) \stackrel{\pi_1(X, y)=0}{\simeq} w'.$$

□ Vorlesung 16
Do 17 Jun 2021

Notation 16.3. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, $w: I \rightarrow X$ ein Weg mit $w(0) = x$ und $e \in p^{-1}(x)$. Dann notieren wir mit $L(w, e)$ die Hebung von w mit Anfangspunkt e , die nach dem **Weghebungssatz** eindeutig existiert.

Satz 16.4. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, wobei E einfach zusammenhängend sei. Sei $x \in X$ und $e \in p^{-1}(x)$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \pi_1(X, x) & \longrightarrow & p^{-1}(x) \\ [w] & \longmapsto & L(w, e)(1) \end{cases}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Wohldefiniertheit: Angenommen, $w \simeq w'$ relativ Anfangs- und Endpunkt.

Nach dem **Theorem 15.23** ist dann auch $L(w, e) \simeq L(w', e)$ homotop relativ Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere haben sie denselben Endpunkt (dieser bleibt während der Homotopie ja konstant), und somit $L(w, e)(1) = L(w', e)(1)$.

Injektivität: Angenommen, $[w], [w'] \in \pi_1(X, x)$ werden auf den gleichen Endpunkt $L(w, e)(1) = L(w', e)(1)$ abgebildet.

Da E einfach zusammenhängend, sind nun $L(w, e)$ und $L(w', e)$ homotop (sie haben den gleichen Anfangs- und Endpunkt) relativ Endpunkten. Sei H eine solche Homotopie. Dann ist $p \circ H$ eine Homotopie von w nach w' relativ Anfangs- und Endpunkt, also $[w] = [w']$ und φ ist wie gewünscht bijektiv.

Surjektivität: Sei $e' \in p^{-1}(x)$. Da E als einfach zusammenhängender Raum insbesondere wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\tilde{w}: I \rightarrow E$ von e nach e' . Dann ist $w := p \circ \tilde{w}$ eine Schleife an x , weil $e, e' \in p^{-1}(x)$, also ist $\varphi([w]) = L(w, e)(1) = \tilde{w}(1) = e'$. Da $e' \in p^{-1}(x)$ beliebig war, ist φ surjektiv.

□

Mündliche Anmerkung 16.5. Mit dieser Bijektion haben wir ein erstes starkes Werkzeug, mit der wir - mittels geschickter Überlagerungen - schon einmal die Mächtigkeit der Fundamentalgruppe bestimmen können.

Satz 16.6. Es ist $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Zudem ist \mathbb{R} einfach zusammenhängend. Wir wählen das Urbild $0 \in \exp^{-1}(1)$. Nach **Theorem 16.4** ist nun

$$\varphi: \begin{array}{l} \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \\ [w] \longmapsto L(w, 0)(1) \end{array}$$

eine Bijektion.

Behauptung 18. φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Unterbeweis. Seien $[w], [w'] \in \pi_1(S^1, 1)$. Es ist zunächst

$$L(w \star w', 0) = L(w, 0) \star L(w', L(w, 0)(1)).$$

(wir heben zunächst w , und müssen verknüpfen mit der Weghebung von w' , die am Endpunkt der Hebung von w , also an $L(w, 0)(1)$, beginnt). Wir interessieren uns für den Endpunkt von $L(w \star w', 0)$, denn auf diesen bildet φ den Weg $w \star w'$ ab. Dazu genügt, den Endpunkt von $L(w', L(w, 0)(1))$ zu bestimmen, dies tun wir, indem wir den Weg parametrisieren:

$$L(w', L(w, 0)(1))(t) = L(w', 0)(t) + L(w, 0)(1).$$

Wir erhalten hier die Hebung an 0 mit einer Verschiebung um $L(w, 0)(1)$ - diese ist auch eine Hebung, weil $\exp(t + n) = \exp(t)$ periodisch ist, und $L(w, 0)(1) \in \mathbb{Z}$ ein Vielfaches der Periode 1 ist.

Bemerkung* 16.7. An dieser Stelle - nämlich dass $L(w, 0)(1) \in \mathbb{Z}$, und wir somit mit $L(w', 0)(t) + L(w, 0)(1)$ wieder eine Hebung von w' erhalten - geht maßgeblich in den Beweis ein, dass wir $1 \in S^1$ als Basispunkt für die definierte Abbildung φ gewählt haben. φ ist zwar auch für andere Basispunkte in S^1 eine

Bijektion, nicht jedoch ein Gruppenhomomorphismus (das Urbild hat in diesem Fall auch gar keine Gruppenstruktur).

Alles in allem können wir nun nachrechnen, dass

$$\begin{aligned}
 \varphi([w] \circ [w']) &= L(w \star w', 0)(1) \\
 &= L(w, 0) \star L(w', L(w, 0)(1))(1) \\
 &= L(w', L(w, 0)(1))(1) \\
 &= (t \mapsto L(w', 0)(t) + L(w, 0)(1))(1) \\
 &= L(w', 0)(1) + L(w, 0)(1) \\
 &= \varphi([w']) + \varphi([w]) \\
 &= \varphi([w]) + \varphi([w'])
 \end{aligned}$$

also ist φ tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus. ■

Also ist φ bijektiv und ein Gruppenhomomorphismus, also schon ein Isomorphismus von Gruppen. □

Mündliche Anmerkung 16.8. Es ist hier ein bisschen Glück bzw. Zufall, dass die Bijektion φ sogar ein Gruppenhomomorphismus ist. Im Allgemeinen wird dies nicht so sein, wir werden uns aber im Zuge von *Gruppenwirkungen* dieser Thematik auch im Allgemeineren noch annähern.

Bemerkung 16.9. Ein Erzeuger von $\pi_1(S^1, 0)$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\exp|_{[0,1]}: [0, 1] \rightarrow S^1.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
 \varphi([\exp|_{[0,1]}]) &= L(\exp|_{[0,1]}, 0)(1) \\
 &= (t \mapsto t)(1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Allgemein kann man so auch zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi(t \mapsto \exp(tk)) = k.$$

□

Satz 16.10. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend, insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 0$.

Bemerkung* 16.11. Vergleiche hierzu auch **Aufgabe 8.4**, hier zeigen wir das gleiche Resultat, aber mit einem etwas anderen Weg.

Satz 16.12. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann ist S^n einfach zusammenhängend, insbesondere $\pi_1(S^n, 1) = 0$.

Als kleine Vorbereitung benötigen wir:

Lemma 16.13. Sei $z \in S^n$ beliebig, dann ist $S^n \setminus \{z\} \cong \mathbb{R}^n$

Beweis. Wir führen eine **stereographische Projektion** durch, d.h. wir definieren die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} S^n \setminus \{z\} & \longrightarrow \langle z \rangle^\perp \\ x & \longmapsto z - \frac{1}{\langle x-z, z \rangle} (x-z) \end{cases}$$

Hierbei ist $\langle z \rangle^\perp$ der Unterraum der Dimension n von \mathbb{R}^{n+1} , auf dem z senkrecht steht, und x wird dann abgebildet auf den Schnittpunkt der Geraden durch x und z mit diesem Unterraum.

Ein Alternativer Beweis wäre, zu verwenden, dass

$$S^n \setminus \{z\} \cong D^n \setminus \{0\} / \partial D^n \cong \mathbb{R}^n.$$

wobei wir im letzten Schritt $x \mapsto \frac{1-\|x\|}{\|x\|^2} x$ abbilden. □

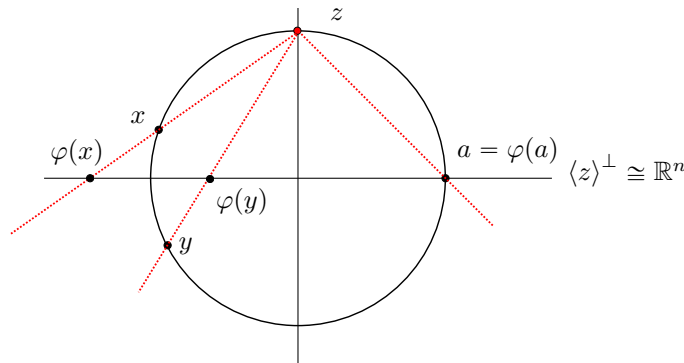


Abbildung 32: Stereographische Projektion zwischen $S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ und $\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

Bemerkung* 16.14 (Wie kommt man auf die Formel der stereographischen Projektion?). Wir wollen für $z \in S^n$ ein $x \neq z \in S^n$ abbilden auf den Schnittpunkt der Geraden durch x, z und dem zu z senkrecht stehenden Unterraum $\langle z \rangle^\perp \cong \mathbb{R}^n$. Bezeichnen wir das Bild von x unter dieser Abbildung mit y , so ergeben sich folgende beiden Bedingungen

- $\langle x, z \rangle = 0$, damit x senkrecht zu z steht, also in der entsprechenden Hyperebene $\cong \mathbb{R}^n$.
- Es sind x, y, z kollinear, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$y = z + \lambda(x - z).$$

, indem wir die entsprechende Gerade durch den Fußpunkt z und den Richtungsvektor $(x - z)$ mit λ parametrisieren.

Einsetzen ineinander ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y, z \rangle \\ &= \langle z + \lambda(x - z), z \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \lambda \langle x - z, z \rangle \\ &= 1 + \lambda \langle x - z, z \rangle \end{aligned}$$

was sich äquivalent umformt zu

$$\lambda = -\frac{1}{\langle x - z, z \rangle}.$$

weswegen wir die obige Form der Abbildung erhalten.

Beweis von Theorem 16.12. Schritt 1: Sei $w: I \rightarrow S^n$ eine Schleife an x , so dass das Bild von w nicht gleich S^n ist.

Behauptung 19. Dann ist w homotop relativ Endpunkten zur konstanten Schleife.

Unterbeweis. Sei $z \in S^n \setminus \text{Bild}(w)$, solch ein Punkt existiert nach Voraussetzung. Wegen Lemma 16.13 können wir w als Schleife in \mathbb{R}^n auffassen, und w ist somit homotop relativ endpunkten zur konstanten Schleife. ■

Schritt 2: Sei w eine beliebige Schleife an x . Wir wollen x in Teile zerlegen, die nicht als Bild die gesamte Kugel haben, um auf Schritt 1 zu reduzieren.

OBdA sei hierzu $x \neq (0, 0, \dots, 1)$ und auch $x \neq (0, 0, \dots, -1)$, sonst rotiere die Sphäre. D.h. x ist nicht der 'Nord-' oder 'Südpol' der Kugel. Nun betrachte

$$S^n = \underbrace{S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\}}_{:=U_1} \cup \underbrace{S^n \setminus \{(0, 0, \dots, -1)\}}_{:=U_2}.$$

Zudem ist

$$V := U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, -1)\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Nach dem Lebesguelemma existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall i \leq n-1 \exists k \in \{1, 2\} \text{ mit } w \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right] \right) \subseteq U_k.$$

Sei $0 = j_0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_l = n$ mit $j_i \in (0, \dots, n)$, sodass

$$w\left(\frac{j_i}{n}\right) \in V \text{ und } w\left(\left[\frac{j_i}{n}, \frac{j_{i+1}}{n}\right]\right) \in U_k.$$

d.h. die j_i sind diejenigen Übergangspunkte, die in V liegen (Liegt einer der j_i nicht in V , so überspringen wir diesen in obiger Auswahl). Nach **Theorem 16.10** ist $w|_{\left[\frac{j_i}{n}, \frac{j_{i+1}}{n}\right]}$ relativ Endpunkten homotop zu einem Weg in V , hierzu wählen wir einen Weg in V , der Anfangs- und Endpunkt verbindet, und beide Wege liegen dann in einem U_k , also einem einfach zusammenhängendem Raum.

Zusammensetzen der so erhaltenen Wege $j_i \rightarrow j_{i+1}$ in V liefert, dass w homotop ist relativ Endpunkten zu einer Schleife in V ist. Nach Schritt 1 ist somit w homotop relativ Endpunkten zur konstanten Schleife, denn $V \subsetneq S^n$. \square

Mündliche Anmerkung 16.15. Der Beweis scheitert für S^1 , weil wir zwar auch $U_1, U_2 \subseteq S^1$ als einfach zusammenhängende Teile konstruieren können, allerdings der Schnitt $V = U_1 \cap U_2$ nicht mehr zusammenhängend ist. Wir können also in U_1, U_2 jeweils Teilstücke des Weges zusammenziehen, diese aber nicht nach V bringen, weswegen uns das nichts nützt.

Bemerkung* 16.16. Es gibt tatsächlich Wege $w: [0, 1] \rightarrow S^n$, die als Bild die gesamte Sphäre haben. Im ersten Moment erscheint das unintuitiv, weil das von den Dimensionen nicht passt, allerdings gibt es sogenannte *Raumfüllende Kurven*. Siehe hierzu auch https://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve.

Haben wir nun z.B. einen surjektiven Weg $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so können wir diesen auch nach S^n surjektiv abbilden, indem wir

$$I \xrightarrow{w} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} D^n \xrightarrow{q} D^n / \{\partial D^n\} \cong S^n.$$

verknüpfen. Hierbei genügt eine beliebige stetige surjektive Projektion $\mathbb{R}^n \rightarrow D^n$, z.B.

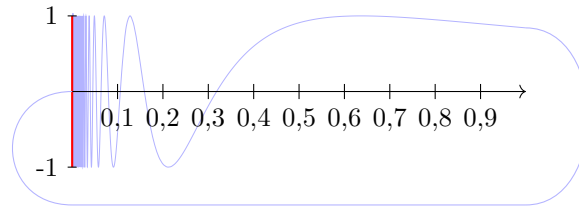
$$x \mapsto \begin{cases} x & x \in D^n \\ \frac{x}{\|x\|} & x \notin D^n \end{cases}.$$

17 Überlagerungen Teil 2

Definition 17.1. Ein Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine Umgebung $V \subseteq U$ existiert, die wegzusammenhängend ist.

Warnung. Es gibt wegzusammenhängende Räume, die nicht lokal wegzusammenhängend sind.

Hierzu betrachte wieder die Sinuskurve des Topologen, füge aber einen weiteren Weg ein, der die beiden Wegzusammenhangskomponenten verbindet, also in etwa so:



Wir wissen bereits, dass die ursprünglich Kurve 2 Wegzusammenhangskomponenten besitzt, da wir diese allerdings verbinden, erhalten wir nun nur noch eine. Betrachten wir aber vom Punkt $(0, 0)$ eine Umgebung mit z.B. Radius $\frac{1}{2}$, so gibt es keine in $U((0, 0), \frac{1}{2})$ enthaltene wegzusammenhängende Umgebung:

Jede solche Umgebung enthält Punkte beider ursprünglicher Zusammenhangskomponenten der Sinuskurve, allerdings kann keine solche Umgebung einen Weg zwischen zwei Punkten dieser Zusammenhangskomponenten enthalten - denn jeder solche muss zwingend außerhalb der ursprünglichen Sinuskurve verlaufen (also den neuen Pfad benutzen), dieser liegt aber nicht gänzlich in der Umgebung $U((0, 0), \frac{1}{2})$.

Beispiel 17.3. Das ganze gilt natürlich erst recht nicht in die andere Richtung, es ist z.B. $S^0 = \{-1, 1\}$ lokal wegzusammenhängend, aber sicherlich nicht wegzusammenhängend.

Satz 17.4. Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann sind alle Wegekomponenten offen in X .

Korollar 17.5. Sei X lokal wegzusammenhängend. Dann ist X die disjunkte Vereinigung seiner Wegekomponenten (topologische gesehen, nicht nur als Mengen).

*Beweis**. Seien C_i die Wegzusammenhangskomponenten von X . Nach universeller Eigenschaft induzieren die Inklusionen $C_i \subseteq X$ eine Abbildung $f: \coprod C_i \rightarrow X$, die auch offensichtlich bijektiv ist. Wir prüfen die Stetigkeit von f^{-1} auf der kanonischen Subbasis von $\coprod C_i$, d.h. für die Elemente der Form

$$U_j \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i \subseteq \coprod C_i.$$

Das entsprechende Urbild unter f^{-1} , d.h. das Bild unter f , ergibt sich als

$$U_j \cup \bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_j.$$

Es sind nun aber die C_i nach **Theorem 17.4** offen, und da $U_j \subseteq C_j \subseteq X$ jeweils offen sind, ist auch $U_j \subseteq X$ offen.

Dieser Beweis funktioniert natürlich für eine beliebige Partition eines beliebigen Raumes in offene Mengen. \square

*Beweis von **Theorem 17.4**.* Sei $C \subseteq X$ eine Wegkomponente von X , und $x \in C$. Da X lokal wegzusammenhängend ist, hat x eine wegzusammenhängende Umgebung V . Dann folgt $V \subseteq C$, weil C die größte wegzusammenhängende Umgebung von x ist, also enthält C eine Umgebung von x , d.h. C ist Umgebung aller inneren Punkte, und somit ist C offen in X . \square

Satz 17.6. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung und X lokal wegzusammenhängend sowie wegzusammenhängend.

- 1) Dann ist E lokal wegzusammenhängend.
- 2) Sei $C \subseteq E$ eine Wegekompnenten. Dann ist auch

$$p|_C: C \rightarrow X.$$

eine Überlagerung.

Mündliche Anmerkung 17.7. Wir können die Implikation 1) nicht durch Wegzusammenhang von E ersetzen, dazu betrachte als Gegenbeispiel eine triviale Überlagerung $S^1 \times F \rightarrow S^1$ für $F \neq \{\star\}$.

Beweis. 1) Sei $e \in E$ und $e \in U$ eine Umgebung. Sei $U' \subseteq E$ offen, $e \in U'$, so dass

$$p|_{U'}: U' \rightarrow p(U')$$

ein Homöomorphismus ist und $p(U') \subseteq X$ offen (das existiert, weil p ein lokaler Homöomorphismus ist). Sei $U'' := U \cap U'$. Dann ist $p(U'')$ eine Umgebung von $p(e) \in X$. Da X lokal wegzusammenhängend existiert eine Umgebung V' von $p(e)$ mit $V' \subseteq p(U'')$, und da $p|_{U'}$ ein lokaler Homöomorphismus, ist $V := p^{-1}(V')$ eine wegzusammenhängende Umgebung von e .

- 2) E ist nach 1) lokal wegzusammenhängend. Dann ist aber bereits $C \subseteq E$ offen nach **Theorem 17.4**.

Sei $x \in X$ beliebig, da $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, existiert eine Umgebung U von x , über der p trivial ist. Da X lokal wegzusammenhängend finden wir eine Umgebung $V \subseteq U$ von x , sodass V wegzusammenhängend. Es kommutiert dann auch

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{u} & V \times p^{-1}(x) \\ & \searrow & \swarrow \\ & V & \end{array}$$

weil das Ganze schon über U galt. Da V wegzusammenhängend und C eine Wegekompnenten ist, liegt $u^{-1}(V \times \{e\})$ für jedes $e \in p^{-1}(x)$ entweder ganz in

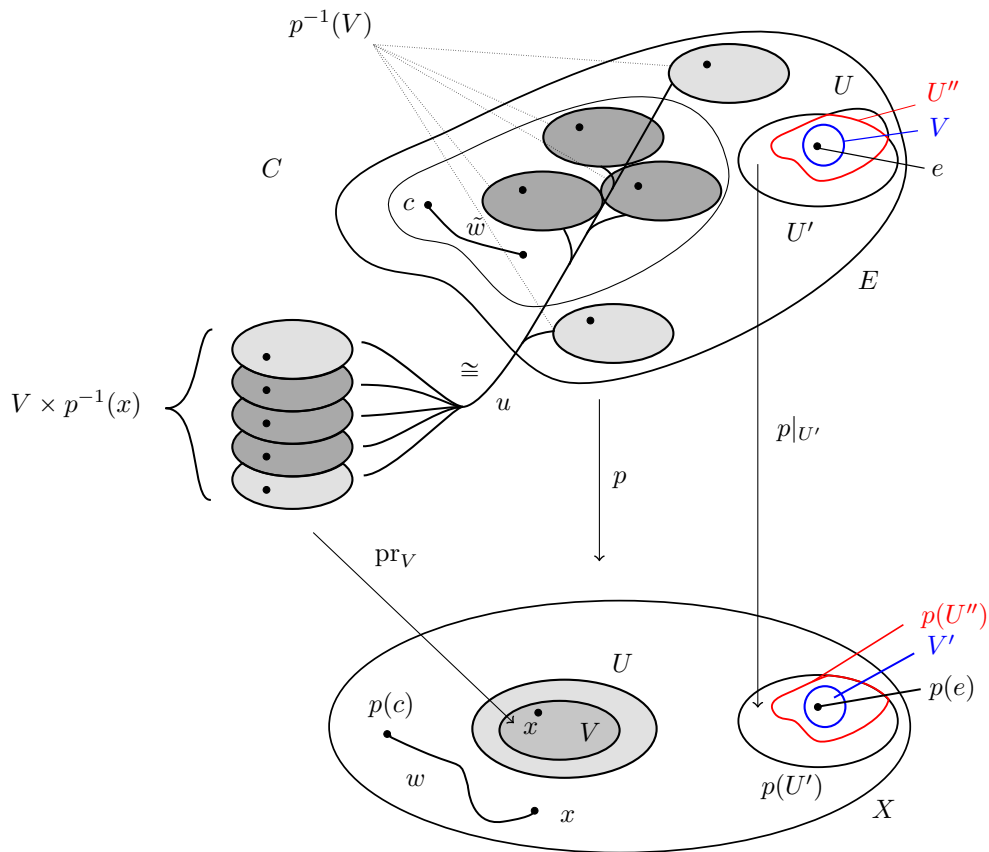


Abbildung 33: Beweisskizze zu **Theorem 17.6**

C oder ganz in $E \setminus C$. Also ist

$$p|_C^{-1}(V) = \bigcup_{e \in p^{-1}(x) \cap C} u^{-1}(V \times \{e\}) = u^{-1}(V \times p|_C^{-1}(x)).$$

und somit ergibt sich das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} p|_C^{-1}(V) & \xrightarrow[u \cong]{} & V \times p|_C^{-1}(x) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & V \end{array}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $p|_C$ auch tatsächlich surjektiv ist. Es ist $C \neq \emptyset$, weil es sich um eine Wegekomponente handelt. Sei $c \in C$ und $x \in X$, wir wollen ein Urbild von x finden. Sei w ein Weg von $p(c)$ nach x , dieser existiert, weil X wegzusammenhängend ist. Sei $\tilde{w}: I \rightarrow E$ ein Lift von w mit Anfangspunkt c . Dann ist $\tilde{w}(t) \in C$ für alle t , weil C eine Wegekomponente ist, und somit

$$p|_C(\tilde{w}(1)) = x.$$

und somit ist $p|_C$ surjektiv. □

Satz 17.8 (Allgemeiner Liftungssatz). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $y_0 \in Y$ und $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte Abbildung.

Dann sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Hebung $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$
- 2) Es ist $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so ist \tilde{f} eindeutig.

Beweis. '1) \implies 2)' Sei $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ eine Hebung, also $p \circ \tilde{f} = f$. Wegen Funktorialität von π_1 ergibt sich dann

$$f_* = (p \circ \tilde{f})_* = p_* \circ \tilde{f}_*: \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Also ist

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p_* \circ \tilde{f}_*)(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

□ Vorlesung 17
Di 22 Jun 2021

Lemma 17.9. Betrachte die gleiche Situation wie im vorherigem Satz. Seien w, w' zwei Wege in Y mit Anfangspunkt y_0 und gleichem Endpunkt. Dann ist

$$L(f \circ w, e_0)(1) = L(f \circ w', e_0)(1).$$

Beweis. Die Verknüpfung $w \star \overline{w'}$ ist eine Schleife an y_0 . Dann ist $f \circ (w \star \overline{w'})$ eine Schleife an x_0 und

$$[f \circ (w \star \overline{w'})] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Sei \tilde{w} eine Schleife in E an e_0 , so dass $p \circ \tilde{w}$ homotop ist zu $f \circ (w \star \overline{w'}) = (f \circ w) \star (f \circ \overline{w'})$ relativ Endpunkten.

Also ist auch relativ Endpunkten:

$$(p \circ \tilde{w}) \star (f \circ w') \simeq (f \circ w) \star (f \circ \overline{w'}) \star (f \circ w') \simeq f \circ w.$$

Nun ist

$$(p \circ \tilde{w}) \star (f \circ w') = p \circ (\tilde{w} \star L(f \circ w', e_0)).$$

und

$$f \circ w \simeq p \circ L(f \circ w, e_0).$$

Nach dem **Homotopieliftungssatz** ist somit $\tilde{w} \star L(f \circ w', e_0)$ homotop (in E) zu $L(f \circ w, e_0)$ relativ Endpunkten. Insbesondere haben die beiden Wege den gleichen Endpunkt. Also

$$L(f \circ w, e_0)(1) = \tilde{w} \star L(f \circ w', e_0)(1) = L(f \circ w', e_0)(1).$$

□

Fortsetzung des Beweises von Theorem 17.8. Nun konstruieren wir uns die Hebung von Y nach E . Definiere \tilde{f} punktweise, indem wir für $y \in Y$ einen Weg w von y_0 nach y wählen (denn Y ist nach Voraussetzung wegzusammenhängend), und dann

$$\tilde{f}(y) := L(f \circ w, e_0)(1).$$

setzen. Als erstes müssen wir prüfen, dass diese Definition wohldefiniert ist, d.h. $\tilde{f}(y)$ ist unabhängig von der Wahl von w . Das haben wir aber gerade genau in Lemma 17.9 gesehen.

Wir prüfen, dass \tilde{f} eine Hebung ist, dazu ist

$$\begin{aligned} p(\tilde{f}(y)) &= p(L(f \circ w, e_0)(1)) \\ &= p(L(f \circ w, e_0))(1) \\ &= (f \circ w)(1) \\ &= f(w(1)) = f(y) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass \tilde{f} stetig ist.

Behauptung 20. Für jedes $y \in Y$ und jede Umgebung V von $\tilde{f}(y)$ existiert eine Umgebung W von y mit $\tilde{f}(W) \subseteq V$, d.h. \tilde{f} ist stetig.

Unterbeweis. Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X , die $f(y)$ enthält, und über der p trivial ist. Sei $u: p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(f(y))$ ein Homöomorphismus über p , und setze dann $V' := V \cap u^{-1}(U \times \{\tilde{f}(y)\})$. Es ist dann $p|_{V'}: V' \rightarrow p(V')$ eine Homöomorphismus mit $p(V')$, einer Umgebung von $f(y)$.

Jetzt erhalten wir mit $f^{-1}(p(V'))$ eine Umgebung von y . Da Y lokal wegzusammenhängend ist, finden wir eine wegzusammenhängende Umgebung $W \subseteq f^{-1}(p(V'))$. Esverbleibt zu zeigen: ■

Behauptung 21. $\tilde{f}(W) \subseteq V'$, also insbesondere $\tilde{f}(y') \in V'$.

Unterbeweis. Sei $y' \in W$ und w ein Weg von y_0 nach y in Y und w' ein Weg von y nach y' in W . Dann ist $w \star w'$ ein Weg von y_0 nach y' . Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y') &= L(f \circ (w \star w'), e_0)(1) \\ &= L(f \circ w, e_0) \star L(f \circ w', \underbrace{L(f \circ w, e_0)(1)}_{=\tilde{f}(y)})(1) \end{aligned}$$

Sehen wir uns den Weg $L(f \circ w', \tilde{f}(y))$ genauer ein, so wissen wir - weil $p|_{V'}$ ein Homöomorphismus ist -, dass

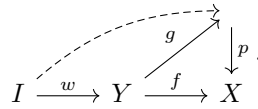
$$L(f \circ w', \tilde{f}(y)) = p|_{V'}^{-1} \circ f \circ w'.$$

und hat somit Bild in V' . Insbesondere liegt auch der Endpunkte dieses Weges, also $\tilde{f}(y')$, in V' . ■

Es bleibt, die Eindeutigkeit von \tilde{f} zu zeigen. Ist g eine weitere Hebung von f , so ist $g|_W$ eine Hebung von $f \circ w$, also ist zwingendermaßen

$$g(y) = g(w(1)) = L(f \circ w, e_0)(1) = \tilde{f}(y).$$

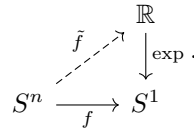
nach Eindeutigkeit der Weghebung, also $\tilde{f} = g$ punktweise, und somit überall.



□

Satz 17.10. Sei $n \geq 2$. Dann ist jede stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung.

Beweis. Da $n \geq 2$ ist, ist $\pi_1(S^n, x_0) = \{\star\}$ trivial, also insbesondere eine Untergruppe von $\exp_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0))$, also existiert nach dem **Allgemeiner Liftungssatz** ein Lift $\tilde{f}: S^n \rightarrow \mathbb{R}$, sodass also kommutiert:

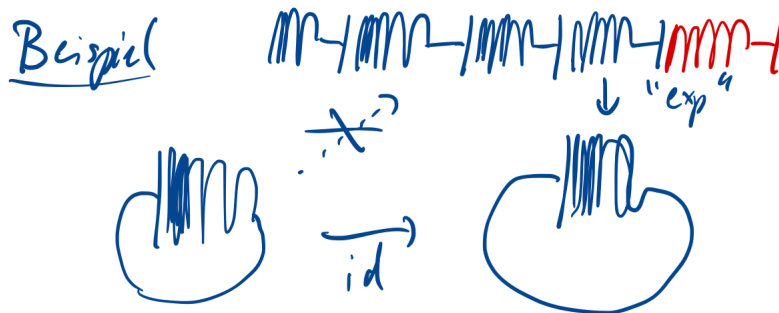


Da \mathbb{R} zusammenziehbar (d.h. homotopieäquivalent zu \star , ist \tilde{f} nullhomotop (d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung).

Sei H eine Nullhomotopie, dann ist $\exp \circ H$ eine Nullhomotopie von f .

□

Beispiel 17.11 ('Gegenbeispiel' zum **Allgemeiner Liftungssatz**). Die Forderung, dass Y lokal wegzusammenhängend ist, ist erforderlich. Wir betrachten hierzu wieder die Sinuskurve des Topologen, deren Wegzusammenhangskomponenten wir verbunden haben, und betrachten analog zur Überlagerung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ eine, indem wir jedes Intervall $[a, a + 1]$ von \mathbb{R} durch die Sinuskurve, und den Kreis durch vorherigen Raum ersetzen.



Setzen wir also $X = Y$ und $f = \text{id}$, so gibt es keinen Lift, wir können diesen zwar mengentheoretisch konstruieren, allerdings wird dieser nicht stetig sein.

Definition 17.12 (Charakteristische Untergruppe). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X, e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Dann heißt $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die **charakteristische Untergruppe**.

Mündliche Anmerkung 17.13. Wir haben im **Allgemeiner Liftungssatz** bereits gesehen, dass diese Gruppe sehr wichtig ist.

Satz 17.14. Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und betrachte zwei Überlagerungen $p: E \rightarrow X, p': E' \rightarrow X$, sodass E, E' zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$ mit Urbildern $e_0 \in p^{-1}(x_0), e'_0 \in p'^{-1}(x_0)$. Dann sind äquivalent:

- 1) Es existiert ein Homöomorphismus der Überlagerungen, d.h. ein $f: E \rightarrow E'$ mit $f(e_0) = e'_0$, sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \cong & \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & X \end{array}$$

- 2) Die charakteristischen Untergruppen stimmen überein, d.h.

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0)).$$

Warnung. Die Bedingung 2) erfordert wirklich, dass $p_*(\pi_1(E, e_0)), p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ als Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ *gleich* sind, nicht nur isomorph.

Vergleiche hierzu auch **Beispiel 17.20**.

Mündliche Anmerkung 17.15. Man könnte auch sagen, dass 1) \implies 2) Teil des allgemeinen Hebungssatzes ist, aber wir machen das trotzdem nochmal.

Beweis von Theorem 17.14. Es ist

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = (p'_* \circ f_*)(\pi_1(E, e_0)) \subseteq p'_*(\pi_1(E', e'_0)).$$

Analoges gilt mit f^{-1} , d.h. $p'_*(\pi_1(E', e'_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$ und offensichtlich sind die Abbildungen invers zueinander.

Für die andere Richtung beobachten wir zunächst, dass E ebenfalls lokal wegzusammenhängend ist (nach **Theorem 17.6**).

Nach dem **Allgemeiner Liftungssatz** finden wir also eine Abbildung $f: E \rightarrow E'$ mit $f(e_0) = e'_0$ und $p' \circ f = p$. Analog existiert ein $g: E' \rightarrow E$ mit $g(e'_0) = e_0$ und $p \circ g = p'$. Es ist aber

$$p \circ (g \circ f) = (p \circ g) \circ f = p' \circ f = p.$$

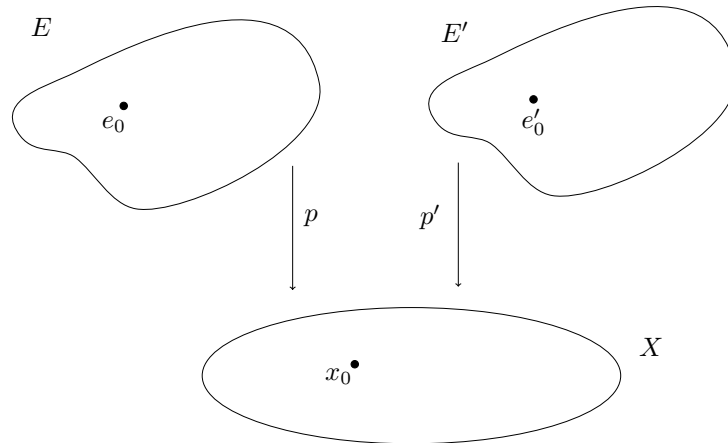


Abbildung 34: Skizze zu **Theorem 17.14**

und $f \circ f(e_0) = g(e'_0) = e_0$, also folgt aus der Eindeutigkeit der Hebung, dass $g \circ f = \text{id}$. Da id_E aber auch eine Hebung von $p: E \rightarrow X$ ist, folgt bereits $g \circ f = \text{id}_E$, und analog $f \circ g = \text{id}_{E'}$. Also sind f, f' Homöomorphismen. \square

Satz 17.16. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung mit $x_0 \in X$, $e_0, e'_0 \in p^{-1}(x_0)$ sowie $w: I \rightarrow E$ ein Weg von e_0 nach e'_0 . Dann ist

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = [p \circ w] \star p_*(\pi_1(E, e'_0)) \star [p \circ \bar{w}].$$

Bemerkung* 17.17. Die Aussage des Satzes ist so zu verstehen, dass die beiden Gruppen $p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $p_*(\pi_1(E, e'_0))$ als *Untergruppen* von $\pi_1(X, x_0)$ zueinander konjugiert sind mittels des Isomorphismus

$$\varphi: \begin{cases} p_*(\pi_1(E, e_0)) & \longrightarrow & p_*(\pi_1(E, e'_0)) \\ [v] & \longmapsto & [p \circ w] \star [v] \star [p \circ \bar{w}] \end{cases}$$

Insbesondere sind sie also isomorph.

Korollar 17.18. Ist $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung mit E wegzusammenhängend, so hängt $p_*(\pi_1(E, e_0))$ nur bis auf Konjugation von der Wahl von e_0 ab.

Beweis vom Satz. Wir wissen, dass die Abbildung

$$\pi_1(E, e'_0) \longrightarrow \pi_1(E, e_0) \\ [v] \longmapsto [w \star v \star \bar{w}]$$

ein Isomorphismus ist. Im Wesentlichen wenden wir nun einfach π_1 (bzw. p_*) auf

diesen an, hierzu ist:

$$\begin{aligned} p_*[w \star v \star \bar{w}] &= [p \circ (w \star v \star \bar{w})] \\ &= [\underbrace{(p \circ w)}_{\text{Schleife in } x_0} \star (p \circ v) \star \underbrace{(p \circ \bar{w})}_{\text{Schleife in } x_0}] \\ &= [p \circ w] \star [p \circ v] \star [p \circ \bar{w}] \end{aligned}$$

beachte, dass nun die \star in der letzten Zeile die Verknüpfung in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet.

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = [p \circ w] \star p_*(\pi_1(E, e'_0)) \star [p \circ \bar{w}].$$

□

Satz 17.19. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Dann ist die Abbildung

$$p_*: \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

injektiv.

Beweis. Für Injektivität genügt es (nach bekannter Gruppentheorie) zu zeigen, dass der Kern trivial ist.

Sei $[w] \in \pi_1(E, e_0)$. Angenommen, $[p \circ w] = 1 := [c_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$. Sei H eine Homotopie von $p \circ w$ nach c_{x_0} . Es ist $p \circ c_{e_0} = c_{x_0}$, also c_{e_0} ein Lift von c_{x_0} mit gleichem Anfangspunkt wie w .

Nach dem **Homotopieliftungssatz** gibt es eine Homotopie von w nach c_{e_0} relativ Endpunkten, diese Homotopie zeigt uns also genau, dass

$$[w] = [c_{e_0}] = 1 \in \pi_1(E, e_0).$$

und somit ist $\ker p_*$ trivial. □

Beispiel 17.20 (Zusammenhängende Überlagerungen der S^1). Wir wollen die zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 bestimmen, hierzu machen wir uns zu Nutze, dass S^1 wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, sodass wir **Theorem 17.14** anwenden können.

Wir erhalten also, dass zwei solche Überlagerungen $E \rightarrow S^1$ genau dann homöomorph (über S^1) sind, wenn die zugehörigen charakteristischen Untergruppen (an Punkten aus der Faser von $1 \in S^1$) identisch sind. Diese sind aber stets Untergruppen von $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, also klassifizieren wir diese:

Die Untergruppen von \mathbb{Z} sind genau $\{0\}$ (die triviale Gruppe) sowie die Gruppen $n\mathbb{Z}$ für $n \geq 1$. Wir erhalten in der Tat

- Für $\{0\}$ die Überlagerung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, hier hat \mathbb{R} die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\mathbb{R}, 0)) = \{0\}$.

- Für $n\mathbb{Z}$ die Überlagerung

$$()^k : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^k \end{array}$$

Diese induziert den Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \\ 1 & \longmapsto & n \end{array}$$

und hat somit charakteristische Untergruppe $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$.

Man beachte, dass all diese charakteristischen Untergruppen für verschiedene n zueinander *isomorph* sind, nicht jedoch *gleich*, weswegen uns **Theorem 17.14** auch nicht sagt, dass sie homöomorph sind.

Als Beispiel fällt einem noch die Überlagerung

$$()^{-k} : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^{-k} \end{array}$$

ein, die $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $1 \mapsto -n$ induziert, also keinen der vorherigen Morphismen. Die charakteristische Fundamentalgruppe ist aber ebenfalls $n\mathbb{Z}$, also muss diese Überlagerung nach **Theorem 17.14** homöomorph zu $()^k$ sein. In der Tat ist auch

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

ein solcher Homöomorphismus $S^1 \xrightarrow{\cong} S^1$ der Überlagerungen, denn es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{z \mapsto \bar{z}} & S^1 \\ & \cong & \\ & \searrow & \swarrow \\ z \mapsto z^k & & z \mapsto z^{-n} \\ & \searrow & \swarrow \\ & S^1 & \end{array}$$

18 Die universelle Überlagerung

Im Folgenden Kapitel widmen wir uns dem Ziel für 'schöne' Räume ein *universelle* Überlagerung, d.h. eine mit E einfach zusammenhängend, zu konstruieren, um die Anwendung von **Theorem 16.4** zu ermöglichen.

Definition 18.1 (Semilokal einfachzusammenhängend). Ein Raum X heißt **semilokal einfachzusammenhängend**, wenn X lokal wegzusammenhängend ist und es für jeden Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung U von x gibt, so dass die Abbildung

$$\iota_* : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x).$$

trivial ist, wobei $\iota : U \rightarrow X$ die kanonische Einbettung ist.

Bemerkung 18.2. Es genügt für die Definition, $\pi_1(U, x) = 0$ oder $\pi_1(X, x) = 0$ zu haben, aber das ist nicht gefordert.

Beispiel 18.3. Intuitiv schließt obige Definition aus, dass es an x immer kleinere Schleifen gibt. Ist das nämlich nicht der Fall, so gibt es in einer Umgebung keine, weswegen obige Abbildung trivial ist. Zwar könnte es in der Umgebung Schleifen in U geben, die nicht trivial sind, diese sind aber in X nullhomotop.

Der **Hawaiianische Ohrring** ist ein typisches Beispiel für einen nicht semilokal einfachzusammenhängenden Raum, weil er genau obige Intuition verletzt.

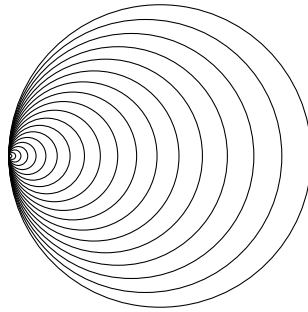


Abbildung 35: Hawaiianischer Ohrring

Definition 18.4 (Universelle Überlagerung). Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Eine Überlagerung $p: E \rightarrow X$ heißt **universell**, falls E einfachzusammenhängend ist.

Beispiel 18.5. Die Überlagerung $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$ ist eine universelle Überlagerung, denn \mathbb{R} ist einfach zusammenhängend.

Satz 18.6. Sei X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- 1) X ist semilokal einfachzusammenhängend.
- 2) X hat eine universelle Überlagerung
- 3) Für jeden Basispunkt $x_0 \in X$ und jede Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ existiert eine wegzusammenhängende Überlagerung $p: E \rightarrow X$ mit $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, so dass $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.

Beweis. '3) \implies 2)' ist einfach ein Spezialfall, indem wir $H = \{0\}$ als die triviale Untergruppe wählen, denn dann ist $p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{0\}$, und wir wissen bereits nach **Theorem 16.4** dass p_* injektiv ist, also ist bereits $\pi_1(E, e_0) = \{0\}$, und somit ist E einfach zusammenhängend.

'2) \implies 1)': Sei $p: E \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung, d.h. E ist einfach zusammenhängend.

Sei $x \in X$ und wähle $e \in p^{-1}(x)$ sowie eine offene Umgebung V von e , sodass $p|_V: V \rightarrow p(V)$ ein Homöomorphismus ist und $p(V) \subseteq X$ offen. Wähle eine wegzusammenhängende Umgebung von x . Die Inklusion $U \rightarrow X$ faktorisiert nun als

$$U \rightarrow p(V) \xrightarrow{p|_V^{-1}} V \rightarrow E \xrightarrow{p} X.$$

Also erhalten wir mit π_1 , dass auch

$$\pi_1(U, x) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(E, e)}_{=0} \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x) .$$

$\downarrow \iota_*$

kommutiert, was sicherlich die triviale Abbildung ist, da wir über die triviale Gruppe faktorisieren. □

Vorlesung 18
Do 24 Jun 2021

Um die verbleibende Richtung 1) \implies 3) zeigen zu können, müssen wir uns im Folgenden recht viel erarbeiten. In allen nachfolgenden Sätzen des Kapitels gehen wir davon aus, dass wir uns in der Situation von **Theorem 18.6** befinden, und dass im Laufe des Kapitels eingeführte Konstruktionen vorhanden sind.

Definition 18.7. Sei $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Zwei Wege w, w' in X mit $w(0) = w'(0) = x_0$ heißen **H -äquivalent**, falls $w(1) = w'(1)$ und $[w \star \bar{w}'] \in H$.

Mündliche Anmerkung 18.8. Das ist keine gängige Notation, und dient einfach nur, den Beweis besser aufschreiben zu können.

Lemma 18.9. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf

$$\{w: I \rightarrow X \mid w(0) = x_0\} .$$

Notation 18.10. Wir notieren $[w]_H$ für die korrespondierenden Äquivalenzklassen.

Beweis von Lemma 18.9. Reflexivität Klar, denn für w beliebig ist $[w \star \bar{w}] = [c_{x_0}] \in H$ das neutrale Element.

Symmetrie Ist $v \simeq_H w$, also $[w \star \bar{v}] \in H$, so ist

$$[v \star \bar{w}] = [\overline{w \star \bar{v}}] = [w \star \bar{v}]^{-1} \in H.$$

weil H unter Inversen abgeschlossen ist.

Transitivität Ist $w \simeq_H w'$ und $w' \simeq_H w''$, so ergibt sich

$$[w \star \overline{w''}] = [\underbrace{w \star \overline{w'}}_{\in H} \star \underbrace{w' \star \overline{w''}}_{\in H}].$$

aber H ist unter Komposition abgeschlossen.

□

Nun können wir unseren Überlagerungsraum - als Menge - bereits durch

$$E(H) := \{w: I \rightarrow X \mid w(0) = x_0\} / \text{H-Äquivalenz}$$

definieren, zusammen mit der Projektion

$$p: \begin{cases} E(H) & \longrightarrow & X \\ [w]_H & \longmapsto & w(1) \end{cases}$$

Bemerkung* 18.11. Man beachte, dass die Projektion wohldefiniert ist, weil nach **Definition 18.7** zwei H -äquivalente Wege insbesondere den gleichen Endpunkt besitzen.

Beispiel 18.12. Ist $H = \{\star\}$ trivial, so sind w und w' H -äquivalent genau dann, wenn $w(1) = w'(1)$ und $w \simeq w'$ relativ Endpunkten.

Ist $H = \pi_1(X, x_0)$, so sind w und w' H -äquivalent genau dann, wenn $w(1) = w'(1)$.

Unser nächstes Ziel ist es, den (zukünftigen) Überlagerungsraum $E(H)$ mit einer Topologie zu versehen. Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen über die Topologie auf X selbst.

Lemma 18.13. Sei X semilokal einfach zusammenhängend, dann ist

$$\mathcal{B} := \{U \subseteq X \text{ offen} \mid U \text{ ist wegzusammenhängend, } \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X) \text{ ist trivial}\}.$$

eine Basis der Topologie auf X .

Beweis. Sei $V \subseteq X$ offen, $x \in V$. Es ist zu zeigen, dass es ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subseteq V$ gibt.

Weil X semilokal einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Umgebung U' von x mit U' wegzusammenhängend und $\pi_1(U', x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ trivial sowie $U' \subseteq V$. Da U' Umgebung ist, existiert ein $U'' \subseteq X$ offen mit $x \in U'' \subseteq U'$, und weil X lokal wegzusammenhängend und U'' offen ist auch U'' lokal wegzusammenhängend. Die Wegekomponenten von U'' sind nun offen in U'' (nach **Theorem 17.4**) und damit auch in X .

Sei U die Wegekomponeute von U'' , die x enthält. Dann ist $U \subseteq X$ offen, wegzusammenhängend, $x \in U$, $U \subseteq U'' \subseteq U' \subseteq V$, und

$$\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(U', x) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \pi_1(X, x).$$

ist somit auch die triviale Abbildung. Also ist U ein Baselement mit $x \in U \subseteq V$. \square

Wir wollen unsere Überlagerung letztendlich so bauen, dass p auf den ebigen Baselementen der Topologie auf X trivial ist. Wir benötigen also für ein solches Baselement $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$ eine offene Umgebung um jedes Urbild in $p^{-1}(x)$, das homöomorph ist zu U , dann liegt folgende Definition nahe:

Lemma und Definition 18.14. Sei $U \in \mathcal{B}$ ein Baselement, und sei $w: I \rightarrow X$ ein Weg mit $w(1) \in U$ (d.h. insbesondere $p([w]_H) \in U$), so definiere

$$\mathcal{B}([w]_H, U) = \{[v]_H \in E(H) \mid v = w \star u, u: I \rightarrow U\}.$$

Beweis der Wohldefiniertheit. Die Definition hängt nur von $[w]_H$ ab, nicht von der Wahl des Vetreters. Ist nämlich $w \simeq_H w'$, so auch $w \star u \simeq_H w' \star u$ wegen

$$w \star u \star \bar{u} \star \bar{w}' \simeq w \star \bar{w}' \implies [(w \star u) \star \overline{w' \star u}] = [w \star \bar{w}'] \in H.$$

\square

Bemerkung* 18.15. Intuitiv haben wir also für jedes U und ein Urbild unter p eines Punktes aus U , d.h. für $[w]_H$, die Menge der Wege definiert, die 'nicht weit Weg von w ' sind, d.h. die sich nur um einen Weg in U unterscheiden.

Das nächste Lemma zeigt, dass sich die so definierte Umgebung nicht ändert, wenn wir w nur 'ein bisschen', d.h. mit einem Weg in U , ändern:

Lemma 18.16. Sei $[v]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U)$. Dann ist

$$\mathcal{B}([v]_H, U) = \mathcal{B}([w]_H, U).$$

Beweis. '⊇'. Wir können für $[v]$ einen Repräsentanten der Form $w \star u$ für $u: I \rightarrow U$ wählen, durch ersetzen von v durch diesen Repräsentanten ändert sich die Aussage nicht, also sei OBdA $v = w \star u$ für ein $u: I \rightarrow U$.

Sei $[\tilde{v}]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U)$ mit $\tilde{v} = w \star \tilde{u}$ mit $\tilde{u}: I \rightarrow U$ beliebig.

Dann ist

$$\tilde{v} = w \star \tilde{u} \simeq w \star u \star \bar{u} \star \tilde{u} = v \star \underbrace{(\bar{u} \star \tilde{u})}_{\text{Weg in } U}.$$

Also $[\tilde{v}]_H = [v \star (\bar{u} \star \tilde{u})]_H \in \mathcal{B}([v]_H, U)$.

Insbesondere ist somit $[w]_H \in \mathcal{B}([v]_H, U)$. Die Inklusion '⊆' folgt also analog. \square

Proposition und Definition 18.17. Die Mengen $\mathcal{B}([w]_H, U)$ definieren eine Basis einer Topologie auf $E(H)$.

Beweis. Nach **Theorem 6.7** müssen wir nur zeigen, dass der Schnitt zweier solcher Mengen wieder Vereinigung solcher ist, bzw. dass wir um jeden Punkt im Schnitt eine solche Umgebung im Schnitt finden.

Seien also $\mathcal{B}([w]_H, U)$ und $\mathcal{B}([w']_H, U')$ zwei solche offenen Mengen, und wähle

$$[v]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U) \cap \mathcal{B}([w']_H, U')$$

beliebig. Nach **Lemma 18.16** sind also die entsprechenden Mengen gleich:

$$\mathcal{B}([w]_H, U) = \mathcal{B}([v]_H, U), \quad \mathcal{B}([w']_H, U') = \mathcal{B}([v]_H, U').$$

Sei $U'' \subseteq U \cap U'$, $U'' \in \mathcal{B}$ mit $v(1) \in U''$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{B}([v]_H, U'') &\subseteq \mathcal{B}([v]_H, U) \cap \mathcal{B}([v]_H, U') \\ &= \mathcal{B}([w]_H, U) \cap \mathcal{B}([w']_H, U') \end{aligned}$$

Die Inklusion ergibt sich dabei unmittelbar aus **Lemma und Definition 18.14**, weil $U'' \subseteq U, U'$. Offensichtlich ist auch $[v]_H$ noch in dieser Umgebung enthalten. \square

Wir statten $E(H)$ nun mit dieser Topologie aus.

Korollar 18.18. Mit dieser Topologie ist die Abbildung $p: E(H) \rightarrow X$ stetig.

Beweis. Wir prüfen die Stetigkeit auf der Basis \mathcal{B} .

Es ist zu zeigen, dass für $U \in \mathcal{B}$ auch $p^{-1}(U) \subseteq E(H)$ offen ist. Es ist

$$p^{-1}(U) = \{[w]_H \in E(H) \mid w(1) \in U\} = \bigcup_{[w]_H, w(1) \in U} \mathcal{B}([w]_H, U).$$

\square

Lemma 18.19. Sei $U \in \mathcal{B}$ und $w: I \rightarrow X$ mit $w(1) \in U$, also $[w]_H \in E(H)$.

$$p|_{\mathcal{B}([w]_H, U)}: \mathcal{B}([w]_H, U) \rightarrow U.$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Surjektivität. Sei $x \in U$. Weil U wegzusammenhängend gibt es einen Weg $u: I \rightarrow U$ mit $u(0) = w(1)$ und $u(1) = x$. Dann ist $[w \star u]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U)$ und $p([w \star u]_H) = (w \star u)(1) = u(1) = x$.

Injektivität Seien $[v]_H, [\tilde{v}]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U)$ mit gleichem Bild unter p , d.h. $v(1) = \tilde{v}(1)$.

Wir können annehmen, dass $v = w \star u$ und $\tilde{v} = w \star \tilde{u}$. Dann ist

$$[v \star \tilde{v}] = [w \star \underbrace{u \star \tilde{u}}_{\text{Schleife in } U} \star \bar{w}].$$

Weil $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ trivial, ist diese Schleife in U also in X nullhomotop, und somit

$$[v \star \bar{v}] = [w \star \bar{w}] = [c_{x_0}].$$

also $[v \star \bar{v}] = 0 \in H$, also wie gewünscht $[v]_H = [\bar{v}]_H$.

Insbesondere ist p offen, da Basiselemente auf Basiselemente gehen (und Abbildungen mit Vereinigungen vertauschen). Da p auch stetig ist und $\mathcal{B}([w]_H, U)$ offen, ist auch

$$p|_{\mathcal{B}([w]_H, U)}.$$

offen und stetig, und somit ein Homöomorphismus. \square

Proposition 18.20. p ist eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in X$, wähle ein Basiselement $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U$.

Behauptung 22. Es ist

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[w]_H \in p^{-1}(x)} \mathcal{B}([w]_H, U).$$

Unterbeweis. Die Richtung ' \supseteq ' ist klar.

Für ' \subseteq ' sei $[v]_H \in p^{-1}(U)$ beliebig. Nach **Lemma 18.19** ist $p|_{\mathcal{B}([v]_H, U)}: \mathcal{B}([v]_H, U) \rightarrow U$ ein Homöomorphismus, also insbesondere surjektiv und wir finden $[w]_H \in \mathcal{B}([v]_H, U)$ mit $p([w]_H) = x$.

Nach **Lemma 18.16** ist nun $\mathcal{B}([v]_H, U) = \mathcal{B}([w]_H, U)$, also

$$[v]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U).$$

Die Vereinigung ist auch disjunkt: Angenommen, $[v]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U) \cap \mathcal{B}([w']_H, U)$ mit $[w]_H, [w']_H \in p^{-1}(x)$, d.h. $w(1) = w'(1) = x$. Dann erhalten wir nach **Lemma 18.16**, dass

$$B([w]_H, U) = \mathcal{B}([v]_H, U) = \mathcal{B}([w']_H, U)$$

und nach **Lemma 18.19** ist $p|_{\mathcal{B}([w']_H, U)}$ injektiv, also $[w]_H = [w']_H$, denn beide werden auf $w(1) = w'(1) = x$ abgebildet. \blacksquare

Also können wir unseren gewünschten Homöomorphismus durch

$$\varphi : \begin{cases} p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[w]_H \in p^{-1}(x)} \mathcal{B}([w]_H, U) & \longrightarrow & U \times p^{-1}(x) \\ [v]_H \in \mathcal{B}([w]_H, U) & \longmapsto & (p([v]_H), [w]_H) \end{cases}$$

definieren. Dass es sich um einen Homöomorphismus handelt, ergibt sich unmittelbar aus **Lemma 18.19**. Zudem ist φ klarerweise eine Abbildung über U , und die Faser $p^{-1}(x)$ kann mit der diskreten Topologie versehen werden, weil auf der linken Seite alle Vereinigungsmengen offen sind und jede dieser genau zu einem Punkt der Faser korrespondiert.

Also ist p eine Überlagerung. \square

Es bleibt final zu zeigen, dass unsere Überlagerung charakteristische Untergruppe H hat. Dazu benötigen wir noch eine Vorbereitung über die Wege in $E(H)$.

Lemma 18.21. Sei $w: I \rightarrow X$ ein Weg mit $w(0) = x_0$. Dann ist

$$\tilde{w}: \begin{cases} I & \longrightarrow & E(H) \\ t & \longmapsto & [w_t]_H \end{cases}$$

mit $w_t(s) = w(ts)$ eine Hebung von w mit Anfangspunkt $e_0 := [c_{x_0}]_H$.

Bemerkung* 18.22. Der Weg w_t ist einfach derjenige Weg, der nur das Anfangsstück von w durchläuft, das man normalerweise im Intervall $[0, t]$ zurücklegt. Da $E(H)$ aus Wegen besteht, ist ein Weg in $E(H)$ demnach ein Weg von Wegen.

Was läge also näher, als einen Weg aus X im Zeitverlauf stückweise mehr entlangzulaufen, um ihn nach $E(H)$ zu heben?

Beweis von Lemma 18.21. Stetigkeit von \tilde{w} : Wir überprüfen dies für Basiselemente um Bildpunkte von \tilde{w} , d.h. es sei $t \in [0, 1]$ beliebig, wähle dann $U \in \mathcal{B}$ mit $w(t) \in U$.

Dann ist $\mathcal{B}([w_t]_H, U)$ eine offene Umgebung von $[w_t]_H$. Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{w}^{-1}(B([w_t]_H, U)) \subseteq I$ offen ist.

Da w stetig ist, ist $w^{-1}(U) \subseteq I$ offen, also gibt es $0 \leq a < t < b \leq 1$ mit $w((a, b)) \subseteq U$.

Behauptung 23. Es ist $\tilde{w}((a, b)) \subseteq B([w_t]_H, U)$.

Unterbeweis. Sei $s \in (a, b)$. Falls $s \geq t$ ist, so ist $w_s \simeq w_t \star w_{t,s}$ wobei $w_{t,s}(r) = w(t + (s-t)r)$ und damit $w_{t,s}([0, 1]) = w([t, s]) \subseteq w((a, b)) \subseteq U$.

Also ist $[w_s]_H \in \mathcal{B}([w_t]_H, U)$. Analoges gilt für $s \leq t$ mit $w_s \simeq w_t \star \overline{w_{s,t}}$. ■

Also ist \tilde{w} stetig. Nun ist

- $\tilde{w}(0) = [w_0]_H = [c_{x_0}]_H = e_0$.
- $p(\tilde{w}(t)) = w_t(1) = w(t)$

Also hebt \tilde{w} den Weg w . □

Fortsetzung des Beweises von Theorem 18.6. Es fehlt noch die Richtung 1) \implies 3). Wir haben bereits gezeigt, dass $p: E(H) \rightarrow X$ eine Überlagerung ist, es verbleibt zu zeigen, dass sie wegzusammenhängend ist und charakteristische Untergruppe H besitzt.

Wir definieren der Einfachheit halber $e_0 := [w_0] \in p^{-1}(x_0) \subseteq E(H)$ als kanonisches Element aus der Faser von x_0 .

1. Schritt: $E(H)$ ist wegzusammenhängend. Sei $[w]_H \in E(H)$ beliebig. Nach **Lemma 18.21** ist

$$\tilde{w} : \begin{cases} I & \longrightarrow & E(H) \\ t & \longmapsto & [w_t]_H \end{cases}$$

eine Hebung von w . Es ist $\tilde{w}(0) = [w_0] = [c_{x_0}] = e_0, \tilde{w}(1) = [w_1]_H = [w]_H$, also ist \tilde{w} ein Weg von e_0 nach $[w]_H$, also ist $E(H)$ wegzusammenhängend, denn wir können von überall nach e_0 laufen.

2. Schritt Es ist $p_*(\pi_1(E(H), e_0)) = H$.

Nach dem Wegehebungssatz und dem Homotopiehebungssatz gilt:

$$\forall [w] \in \pi_1(X, x_0) : [w] \in p_*(\pi_1(E(H), e_0)) \iff \tilde{w} \text{ ist eine Schleife an } e_0.$$

\tilde{w} ist gegeben durch $\tilde{w}(t) = [w_t]_H$. Also ist $\tilde{w}(1) = [w]_H$. Es ist zudem $[w]_H = [c_{x_0}] = e_0$ genau dann wenn $[w] \in H$, d.h. \tilde{w} ist eine Schleife an e_0 genau dann, wenn $[w] \in H$. Also folgt zusammen

$$p_*(\pi_1(E(H), e_0)) = H.$$

wie gewünscht. □

19 Decktransformationen

Lemma und Definition 19.1 (Decktransformation). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \cong & \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

über X . Wir bezeichnen mit $\Delta(p)$ die Menge der Decktransformationen, und diese bilden eine Gruppe.

Beweis. Sind $f, g \in \Delta(p)$ ist $(p \circ g) \circ f = p \circ f = p$, und somit $g \circ f \in \Delta(p)$. Für $f \in \Delta(p)$ ist auch $f^{-1} \in \Delta(p)$. □

Vorlesung 19
Di 29 Jun 2021

Beispiel 19.2. 1) Betrachte wieder die Überlagerung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$.

Behauptung. $\Delta(\exp) = \{T_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit $T_n(x) = x + n$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es sich überhaupt um Decktransformationen handelt. Offensichtlich sind das Automorphismen von \mathbb{R} , wir müssen noch zeigen, dass diese über S^1 sind, es ist hierzu

$$\exp(T_n(x)) = \exp(x + n) = \exp(x).$$

Sei nun $f \in \Delta(\exp)$ eine beliebige Decktransformation. Dann ist $f(0) \in \mathbb{Z}$

weil $\exp^{-1}(1) \in \mathbb{Z}$ und f ein Morphismus über S^1 ist. Betrachte nun

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) - (x + f(0)) \end{cases}$$

Dann ist

$$\exp(f(x) - (x + f(0))) = \exp(f(x)) \cdot \exp(x)^{-1} \cdot \exp(f(0))^{-1} = \exp(x) \exp(x)^{-1} = 1.$$

Also ist $\varphi(\mathbb{R}) \in \mathbb{Z}$, also konstant weil \mathbb{Z} die diskrete Topologie trägt. Mit $f(0) - (0 + f(0)) = 0$ sehen wir $\varphi \equiv 0$.

$$f(x) = x + f(0) \implies f = T_{f(0)}.$$

also haben wir tatsächlich alle solchen Überlagerungen gefunden. \square

2) Betrachte für $n \geq 2$ die Überlagerung $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Behauptung. Dann ist $\Delta(p) = \{\text{id}_{S^n}, \iota\}$, wobei ι die Antipodalabbildung sein sollte.

Beweis. Es ist klar, dass die beiden vorgegebenen Abbildungen Decktransformationen sind.

Ist $f \in \Delta(p)$, so ist bereits $f(x) = \text{sgn}(x) \cdot x$, wobei

$$\text{sgn}: S^n \rightarrow \{-1, 1\}.$$

stetig ist. Die Abbildung sgn ist also konstant, und es folgt $f = \text{id}_{S^n}$ für $\text{sgn} \equiv 1$, und $f = \iota$ für $\text{sgn} \equiv -1$. \square

Also ist $\Delta(p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, denn es gibt nur eine Gruppe mit 2 Elementen.

Notation 19.3. Ist H eine Untergruppe von G , so schreiben wir $H \leq G$, nicht wie ansonsten üblich $H \subseteq G$.

Definition 19.4 (Normalisator). Sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Der **Normalisator** von H in G ist definiert durch

$$N_G H := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Dies ist eine Untergruppe von G .

Bemerkung* 19.5. Der Begriff Normalisator kommt daher, dass es sich bei $N_G H$ um die größte Untergruppe von G handelt, in der H noch normal ist. Ist H ein Normalteiler von G , so ergibt sich $N_G H = G$. Außerdem erkennt man so, dass auch $H \leq N_G H$.

Bemerkung 19.6. Die Bedingung $gHg^{-1} = H$ sagt *nicht* notwendigerweise aus, dass $ghg^{-1} = h$ für $h \in H$, nur dass die beiden entstehenden Mengen gleich sind.

Bemerkung 19.7. Per Definition ist H normal in $N_G H$. Also ist $H \backslash N_G H$ (die Menge der Linksnebenklassen) wieder eine Gruppe mittels

$$(Hg)(Hg') = H(gg').$$

Mündliche Anmerkung 19.8. Es gibt erstmal keinen Grund, warum wir die *Linksnebenklassen* verwenden, für die *Rechtsnebenklassen* gilt Obiges auch. Wir werden aber später im Zusammenhang mit Gruppentheorie sehen, dass es aus Konsistenzgründen besser ist, jetzt schon mit *Linksnebenklassen* zu arbeiten, damit wir später nicht zwischen den beiden Konzepten wechseln müssen.

Erinnerung Ist $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung mit X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $x_0 \in X$ und $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ sowie $H := p_*(\pi_1(E, e_0))$ die charakteristischen Untergruppe. Dann ist

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \{ \text{Weg } w \text{ in } X \mid w(0) = x_0 \} / H\text{-Äquivalenz} \\ e & \longmapsto [p \circ v]_H \end{cases}$$

eine Bijektion, wobei v ein Weg von e_0 nach e sei. Nach **Theorem 17.14** ist nämlich der Isomorphismus

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E(H) \\ e_0 &\longmapsto [c_{p(e_0)}]_H \end{aligned}$$

durch Wegeliftung bestimmt. $[p \circ v]_H$ ist nun aber per Definition der Endpunkt der Liftung von $p \circ v$ mit Startpunkt $[c_{p(e_0)}]_H$, also genau das Bild von e unter dem bereits bekannten Isomorphismus.

Insbesondere erhalten wir auch eine Bijektion

$$\varphi(p^{-1}(x_0)) = \pi_1(X, x_0) / H\text{-Äquivalenz}$$

Satz 19.9. Seien E, X, p, x_0, e_0, H wie oben.

1) Für $f \in \Delta(p)$ ist

$$\varphi(f(e_0)) \in H \backslash N_{\pi_1(X, x_0)} H.$$

2) Die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} \Delta(p) & \longrightarrow H \backslash N_{\pi_1(X, x_0)} H \\ f & \longmapsto \varphi(f(e_0)) \end{cases}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Korollar 19.10. Ist p die universelle Überlagerung von X , so ist

$$\Delta(p) \cong \pi_1(X, x_0).$$

Beweis. Ist p die universelle Überlagerung, so ist $H = p_*(\pi_1(E, e_0)) = \{1\}$ die triviale Untergruppe, d.h. $N_{\pi_1(X, x_0)}H = \pi_1(X, x_0)$. \square

Beweis von Theorem 19.9. 1) Es ist f eine Hebung von p , denn es kommutiert ja

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow f & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Nach dem **Allgemeiner Liftungssatz** ergibt sich nun

$$H = p_*(\pi_1(E, e)) \leq p_*(\pi_1(E, f(e_0))).$$

Sei v ein Weg von e_0 zu $f(e_0)$. Dann ist

$$H \leq p_*(\pi_1(E, f(e_0))) = [p \circ v]^{-1} \star p_*(\pi_1(E, e_0)) \star [p \circ v].$$

Also ergibt sich zusammen

$$[p \circ v]^{-1} \star H \star [p \circ v] \leq H.$$

Vertauschen von $e_0, f(e_0)$ sowie Ersetzung von f durch f^{-1} ergibt nun, dass auch

$$[p \circ v] \star H \star [p \circ v]^{-1} \leq H.$$

und aus Symmetrie folgt dann

$$[p \circ v] \star H \star [p \circ v]^{-1} = H.$$

also folgt $[p \circ v] \in N_{\pi_1(X, x_0)}H$, und somit insbesondere

$$\varphi(f(e_0)) = [p \circ v]_H \in H \setminus N_{\pi_1(X, x_0)}H.$$

2) **Injektivität** Seien $f, g \in \Delta(p)$ mit

$$\varphi(f(e_0))f\psi(f) = \psi(g) = \varphi(g(e_0)).$$

so folgt aus Injektivität von φ zunächst $f(e_0) = g(e_0)$, aber f, g sind Hebungen von p und stimmen in e_0 überein, also gilt $f = g$ nach der Eindeutigkeit im **Allgemeiner Liftungssatz**.

Surjektivität Sei $[w] \in N_{\pi_1(X, x_0)}H$ ein Element aus dem Normalisator. Sei $e'_0 := L(w, e_0)(1)$ der Endpunkt der Hebung von e'_0 .

Es ist nach **Theorem 17.16** nun:

$$p_*(\pi_1(E, e'_0)) = \underbrace{[p \circ L(w, e_0)]^{-1}}_{=w^{-1}} \star H \star \underbrace{[p \circ L(w, e_0)]}_{=w}$$

$$[w]_{\in N_{\pi_1(X, x_0)}H} H$$

Nach **Theorem 17.14** gibt es also einen Homöomorphismus $f: E \xrightarrow{\cong} E$ mit $p \circ f = p$ und $f(e_0) = e'_0$, bei f handelt es sich dann um eine Decktransformation, und wir sehen leicht

$$\psi(f) = \varphi(f(e_0)) = \varphi(e'_0) = [p \circ L(w, e_0)]_H = [w]_H.$$

Gruppenhomomorphismus Seien $f, g \in \Delta(p)$ und v ein Weg von e_0 nach $f(e_0)$ sowie v' ein Weg von e_0 nach $g(e_0)$. Dann ist $g \circ v$ ein Weg von $g(e_0)$ nach $g(f(e_0))$ und $v' \star (g \circ v)$ ein Weg von e_0 nach $g(f(e_0))$.

Es ist nun

$$\begin{aligned} \psi(g \circ f) &= [p \circ (v \star (g \circ v))]_H \\ &= H[p \circ (v' \star (g \circ v))] \\ &= H[(p \circ v') \star p(g \circ v)] \\ &= H[p \circ v'] \star H[p(g \circ v)] \\ &\stackrel{p \circ g = p}{=} H[p \circ v'] \star H[p \circ v] \\ &= \psi(g) \star \psi(f) \end{aligned}$$

□

Bemerkung* 19.11. Hier kam in der Vorlesung etwas zu Gruppen und Nebenklassen etc. Das wird noch nachgeholt, ich war mit Links- / Rechtsnebenklassen und deren Bezeichnung selbst etwas verwirrt.

Definition 19.12 (G -Menge). Sei G eine Gruppe. Eine (**Rechts-**) G -Menge ist eine Menge X mit einer Abbildung

$$\cdot : \begin{cases} X \times G & \longrightarrow X \\ (x, g) & \longmapsto x.g \end{cases}$$

für die gilt

- i) $x.1 = x$ für $x \in X$
- ii) $(x.g).h = x.(gh)$ für $x \in X$ und $g, h \in G$.

Ein **Homomorphismus von G -Mengen** ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass

$$f(x.g) = f(x).g \quad \forall x \in X, g \in G.$$

Bemerkung 19.13 (Ent- oder auch Verwirrung bezüglich Links und Rechts). Analoges können wir für links- G -Mengen definieren, dann fordern wir $h.(g.x) = (hg).x$. Eine Links- G -menge ist eine Rechts- G -Menge mittels

$$x.g := g^{-1}.x.$$

bzw. wir können auch eine Links- G -Menge als Rechts- G^{op} -Menge auffassen.

Eine Links- G -Menge ist nämlich nichts anderes als Ein Funktor $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$, und eine Rechts- G -Menge ist ein Funktor $\mathcal{G}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, aber wegen $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{\text{op}}$ sind die Konzepte äquivalent.

Trivial Nonsense 19.14. G -Mengen sind also genau Funktoren $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$, und Morphismen von G -Mengen $X, Y: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ sind genau natürliche Transformationen $X \rightarrow Y$.

Die Kategorie der G -Mengen über einer Gruppe G ist dann genau die Funktorkategorie $[\mathcal{G}, \mathbf{Set}]$.

Beispiel 19.15. Ist $H \leq G$, so ist $H \backslash G$ eine G -Menge mittels $(Hg)g' = H(gg')$.

Beispiel 19.16. Das semidirekte Produkt $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ von \mathbb{Z} mit \mathbb{Z} ist die Gruppe mit Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und Verknüpfung

$$(n, m)(n', m') = (n + (-1)^m n', m + m').$$

Es gibt eine Rechtswirkung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (n, m)) &\longmapsto ((-1)^m(x + n), y + m) \end{aligned}$$

(Übung, dass das die Axiome erfüllt).

Behauptung. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists (n, m) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, sodass

$$(x, y).(n, m) \in I^2.$$

Beweis. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Zunächst existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass $y + m \in I$, und dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $(-1)^m x + n \in I$, dann ist

$$(x, y). \underbrace{(0, m).(n, 0)}_{=((-1)^m n, m)} = ((-1)^m x, y + m)(n, 0) = ((-1)^m x + n, y + m).$$

□

Falls $x \notin \mathbb{Z}, y \notin \mathbb{Z}$, so sind n, m eindeutig bestimmt. Mittels den Gleichungen

$$(t, 0).(0, 1) = (-t, 1) \quad (0, t).(1, 0) = (1, t).$$

folgt nun, dass $\mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ die Kleinsche Flasche ist.

Behauptung. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Überlagerung und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sind die Decktransformationen.

Beweis. Übung. □

Da \mathbb{R}^2 einfach zusammenhängend ist, folgt mit **Korollar 19.10**, dass

$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Mündliche Anmerkung 19.17. Semidirekte Produkte machen zwischen beliebigen Gruppen G, H Sinn, wenn wir eine Wirkung von G auf H haben. In obigem Fall gibt es aber nur eine nichttriviale Wirkung von \mathbb{Z} auf \mathbb{Z} , weswegen wir von dem semidirekten Produkt $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ sprechen können.

Vorlesung 20
Do 01 Jul 2021

Wir starten mit einem Überblick der letzten Vorlesungen:

Satz 17.8 (Allgemeiner Liftungssatz). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $y_0 \in Y$ und $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte Abbildung.

Dann sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Hebung $\tilde{f}: Y \rightarrow E$ mit $\tilde{f}(y_0) = e_0$
- 2) Es ist $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so ist \tilde{f} eindeutig.

Definition 17.12 (Charakteristische Untergruppe). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X, e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Dann heißt $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die **charakteristische Untergruppe**.

Satz 17.14. Sei X wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und betrachte zwei Überlagerungen $p: E \rightarrow X, p': E' \rightarrow X$, sodass E, E' zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$ mit Urbildern $e_0 \in p^{-1}(x_0), e'_0 \in p'^{-1}(x_0)$. Dann sind äquivalent:

- 1) Es existiert ein Homöomorphismus der Überlagerungen, d.h. ein $f: E \rightarrow E'$ mit $f(e_0) = e'_0$, sodass folgendes kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\cong]{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & X \end{array}$$

2) Die charakteristischen Untergruppen stimmen überein, d.h.

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0)).$$

Satz 17.16. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung mit $x_0 \in X$, $e_0, e'_0 \in p^{-1}(x_0)$ sowie $w: I \rightarrow E$ ein Weg von e_0 nach e'_0 . Dann ist

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = [p \circ w] \star p_*(\pi_1(E, e'_0)) \star [p \circ \bar{w}].$$

Satz 18.6. Sei X lokal wegzusammenhängend und zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- 1) X ist semilokal einfachzusammenhängend.
- 2) X hat eine universelle Überlagerung
- 3) Für jeden Basispunkt $x_0 \in X$ und jede Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ existiert eine wegzusammenhängende Überlagerung $p: E \rightarrow X$ mit $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, so dass $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.

Insgesamt können wir folgendes zusammenfassen:

$$\text{zsh. Überlagerungen von } X / \text{Hom über } X \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von Unter-} \\ \text{gruppen in } \pi_1(X, x_0) \end{array} \right\}$$

Mündliche Anmerkung 19.18. Das ganze ist schon sehr toll, aber bisher 'nur' eine mengentheoretische Aussage. Wir würden gerne auch die Homomorphismen (nicht-Isomorphismen insbesondere, die Isomorphismen verstehen wir, zumindest deren Existenz) verstehen.

Der Hauptsatz der Überlagerungstheorie verfolgt genau dieses Ziel, er gibt eine kategorientheoretischere Verallgemeinerung von obiger Bijektion.

Definition 19.19. Eine G -Menge X heißt **transitiv**, falls $\forall x, y \in X \exists g \in G$ mit $x.g = y$.

Notation 19.20. Wir sagen auch, dass die Wirkung von G auf X transitiv ist.

Beispiel 19.21. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist $H \backslash G$, die Menge der Nebenklassen von H , eine transitive G -Menge. Für $Hg, Hg' \in H \backslash G$ haben wir nämlich die Wirkung $Hg.(g^{-1}g') = Hg'$.

Lemma und Definition 19.22 (Bahn). Sei X eine G -Menge und $x \in X$. Dann definiert

$$x.G = \{x.g \mid g \in G\}.$$

die **Bahn** oder auch **Orbit** von x . Dann ist $x.G$ eine Unter- G -Menge und $x.G$ ist transitiv.

Beweis. Abgeschlossenheit Sei $x.g \in x.G$ beliebig, dann ist die Wirkung unter einem beliebigen g' genau

$$(x.g).g' = x.(g \circ g').$$

in $x.G$ enthalten, weil $g \circ g' \in G$.

Transitivität Seien $x.g$ und $x.g' \in x.G$ beliebig. Dann ist

$$(x.g).(gg^{-1}) = x.(gg^{-1}g') = x.g'.$$

und somit ist die Wirkung transitiv. □

Lemma 19.23. Sei X eine G -Menge. Seien $x, x' \in X$ beliebig. Dann ist $x.G = x'.G$ oder $(x.G) \cap (x'.G) = \emptyset$.

Beweis. Nimm an, dass $(x.G) \cap (x'.G) \neq \emptyset$. Wähle also ein y mit

$$y \in (x.G) \cap (x'.G).$$

Dann ist also $y = x.g = x'.g'$ für $g, g' \in G$. Dann ist aber für alle $h \in G$ auch

$$x.h = x.(g.g^{-1}).h = (x.g).g^{-1}.h = y.g^{-1}.h = x'.(g'g^{-1}h) \in x'.G.$$

also ergibt sich $x.G \subseteq x'.G$. Aus Symmetrie folgt $x'.G \subseteq x.G$, also sind die Klassen gleich. □

Korollar 19.24. Jede G -Menge ist die disjunkte Vereinigung ihrer Bahnen.

Lemma und Definition 19.25 (Stabilisator). Sei X eine G -Menge und $x \in X$. Dann ist der **Stabilisator** von x die Untergruppe

$$G_x = \{g \in G \mid x.g = x\} \leq G.$$

Beweis. Ist $g \in G_x$, so ergibt sich

$$x = x.e = x.(gg^{-1}) = x.g.g^{-1} = x.g^{-1}.$$

also ist auch $g^{-1} \in G_x$. Sind zudem $g, h \in G_x$ beliebig, so erhalten wir mit

$$x.(gh) = x.g.h = x.h = x.$$

auch sofort, dass $gh \in G_x$. Also ist $G_x \leq G$ tatsächlich eine Untergruppe wie behauptet. □

Lemma 19.26. Sei X eine G -Menge und $x \in X$. Dann ist $x.G$ isomorph (als G -Menge) zu $G_x \backslash G$.

Beweis. Definiere

$$\varphi : \begin{array}{c} G_x \backslash G \\ G_x g \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow x.G \\ \longmapsto x.g \end{array}$$

Wohldefiniertheit Gleiche Elemente auf der linken Seite unterscheiden sich in ihrer Darstellung nur um ein Element aus $h \in G_x$, wir wollen zeigen, dass dies gleiches Bild ergibt:

$$\varphi(G_x h g) = x.(h g) = x.h.g = x.g = \varphi(G_x g).$$

Injektivität Ist $x.g = x.g'$, dann ergibt sich auch

$$x = x.g'.g^{-1}.$$

und daraus folgt bereits, dass $g'.g^{-1} \in G_x$ nach Definition, also

$$G_x g = G_x g'(g^{-1}g) = G_x \underbrace{(g'.g^{-1})}_{\in G_x} g = G_x g'.$$

also waren auch schon die Nebenklassen gleich.

Surjektivität Ist $x.g \in x.G$ beliebig, so ist offensichtlich

$$x.g = \varphi(G_x g).$$

G -Äquivarianz (Homomorphismus von G -Mengen). Es ist

$$\varphi((G_x g)g') = \varphi(G_x (gg')) = x.(gg') = (x.g).g' = \varphi(G_x g).g'.$$

Die Mengentheoretische Umkehrabbildung ist dann auch G -Äquivariant, also ist φ ein Isomorphismus. \square

Mündliche Anmerkung 19.27. Auch, wenn das im Allgemeinen nicht so ist, dass Mengentheoretischer Isomorphismus + Kategorientheoretischer Homomorphismus \implies Kategorieller Isomorphismus (das gilt ja z.B. in **Top** nicht, siehe $\exp: [0, 1) \rightarrow S^1$), gilt dies für G -Mengen (und im Übrigen auch für Gruppen).

Also ist jede G -menge isomorph zu einer disjunkten Vereinigung um G -Mengen der Form $H \backslash G$, wobei $H \leq G$.

Warnung. Auch, wenn wir die Notation $H \backslash G$ verwendet haben, wollen wir damit nicht notwendigerweise ausdrücken, dass H normal ist in G , wir haben nur die Menge der Nebenklassen betrachtet, und zwar als Menge.

20 Hauptsatz der Überlagerungstheorie

Sei in diesem Kapitel stets $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung.

Lemma und Definition 20.1. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wirkt folgendermaßen auf $p^{-1}(x_0)$: Sei $e \in p^{-1}(x_0)$, und $[w] \in \pi_1(X, x_0)$, dann definiere

$$e.[w] = L(w, e)(1) \in p^{-1}(x_0).$$

Mit dieser Wirkung ist $p^{-1}(x_0)$ eine G -Menge.

Beweis. Wohldefiniertheit Sind w, w' homotop relativ Endpunkten sind, dann auch $L(w, e)$ und $L(w', e)$ nach dem **Homotopieliftungssatz**, also sind insbesondere ihre Endpunkte gleich.

Axiome der Gruppenwirkung Es ist offenbar

$$e.[c_{x_0}] = L(c_{x_0}, e) = c_e(1) = e.$$

und auch

$$\begin{aligned} e.([w] \star [w]) &= L(w \star w, e)(1) \\ &= (L(w, e) \star L(w', L(w, e)(1)))(1) \\ &= L(w', \underbrace{L(w, e(1))}_{=e.[w]})(1) \\ &= (e.[w]).[w'] \end{aligned}$$

□

Mündliche Anmerkung 20.2. An dieser Stelle geht das einzige Mal ein, dass wir links- G -Mengen betrachtet haben, weil wir die Verknüpfung von Schleifen in dieser Richtung definiert hatten.

Lemma 20.3. Sind $p: E \rightarrow X$ und $p': E' \rightarrow X$ Überlagerungen sowie $x_0 \in X$. Sei $f: E \rightarrow E'$ eine Abbildung von Überlagerungen, d.h. $p = p' \circ f$. Dann ist

$$f|_{p^{-1}(x_0)}: p^{-1}(x_0) \rightarrow p'^{-1}(x_0).$$

ein Homomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ -Mengen.

Beweis. Wohldefiniertheit Sei $e \in p^{-1}(x_0)$. Dann ist $p'(f(e)) = p(e) = x_0$, also ist $f(e) \in p'^{-1}(x_0)$.

Äquivarianz Sei $e \in p^{-1}(x_0)$ sowie $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ beliebig. Dann ist

$$f(e).[w] = L_{p'}(w, f(e))(1) \stackrel{!}{=} f \circ L_p(w, e)(1) = f(e.[w]).$$

Das ergibt sich aber, indem wir nachrechnen, dass $f \circ L_p(w, e)$ eine Liftung ist, denn

$$p' \circ f \circ L_p(w, e) = p \circ L_p(w, e) = w.$$

aber mittlerweile ist uns klar, dass Liftungen eindeutig sind nach dem **Weghebungssatz**.

□

Lemma 20.4. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Überlagerungen von } X & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0)\text{-Mengen} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array} & \longmapsto & p^{-1}(x_0) \\
 \\
 \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \searrow p & & \swarrow p' \\ & X & \end{array} & \longmapsto & f|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \rightarrow p'^{-1}(x_0)
 \end{array}$$

ist ein Funktor.

Beweis. Wir haben schon gezeigt, dass das eine Wohldefinierte Zuordnung (Abbildung) ist. Wir müssen noch zeigen, dass das ganze mit Verknüpfung verträglich ist, und Identitäten auf Identitäten gehen. Ist also

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E'' \\ \searrow p' & & \swarrow p'' \\ & X & \end{array}$$

ein weiterer Morphismus von Überlagerungen, so ist

$$(g \circ f)|_{p^{-1}(x_0)} = g|_{p^{-1}(x_0)} \circ f|_{p^{-1}(x_0)}.$$

und es ist sicherlich auch

$$(\text{id}_E)|_{p^{-1}(x_0)} = \text{id}_{p^{-1}(x_0)}.$$

also erfüllt diese Abbildung die Eigenschaften eines Funktors. □

Satz 20.5 (Hauptsatz der Überlagerungstheorie). Sei X zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend, semilokal einfachzusammenhängend sowie $x_0 \in X$. Dann ist der Funktor aus **Lemma 20.4** eine Äquivalenz von Kategorien. Das heißt:

- 1) Für jede $\pi_1(X, x_0)$ -Menge M gibt es eine Überlagerung $p: E \rightarrow X$, so dass $p^{-1}(x_0)$ isomorph ist (als $\pi_1(X, x_0)$ -Menge) zu M . (*essentielle Surjektivität*)

2) Für zwei Überlagerungen $p: E \rightarrow X$ und $p': E' \rightarrow X$ ist die Zuordnung

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & X \end{array} \right\} \mapsto \{f|_{p^{-1}(x_0)}: p^{-1}(x_0) \rightarrow p'^{-1}(x_0)\}$$

Mündliche Anmerkung 20.6. Für die 'Entpackung' dieser kategorientheoretischen Aussage haben wir die Charakterisierung von TODO.

Bemerkung 20.7. Die Eigenschaft, dass X semilokal einfach zusammenhängend ist, benötigen wir nur für Eigenschaft 1), um z.B. eine universelle Überlagerung konstruieren zu können. Für 2) genügt es allerdings zu fordern, dass X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

Bemerkung* 20.8. An dieser Stelle haben wir nun **Seifert-van-Kampen** eingeführt, und weite Teile von **Abschnitt 21** vorgezogen, damit diese vor der Klausur bekannt sind. Erst danach sind wir hierher zurückgekommen, und haben den **Hauptsatz der Überlagerungstheorie** bewiesen.

Vorlesung 22
Do 08 Jul 2021

Wir erinnern uns daran, dass die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$ durch

$$e.[w] := L(w, e)(1).$$

gegeben ist.

Proposition 20.9. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung, X wegzusammenhängend sowie $x_0 \in X$. Dann induziert die Inklusion $p^{-1}(x_0) \hookrightarrow E$ eine Bijektion

$$\{\pi_1(X, x_0) - \text{Bahnen von } p^{-1}(x_0)\} \xrightarrow{1:1} \{\text{Wegkomponenten von } E\}.$$

Beweis. Wohldefiniertheit Zu zeigen: Für $e \in p^{-1}(x_0)$ liegen e und $e.[w]$ in der gleichen Wegkomponente. Es ist aber

$$e.[w] = L(w, e)(1).$$

und damit ist $L(w, e)$ ein Weg von e nach $e.[w]$, und somit liegen die Punkte in der gleichen Wegkomponenten von E .

Injektivität Seien $e, e' \in p^{-1}(x_0)$, so dass diese auf die gleiche Wegkomponenten abgebildet werden, dann gibt es einen Weg v von e nach e' . Dann ist

$$e. \underbrace{[p \circ v]}_{\in \pi_1(X, x_0)} = L(p \circ v, e)(1) = v(1) = e'.$$

also liegen e, e' in der gleichen Bahn.

Surjektivität Sei \tilde{E} eine Wegekomponekte von E sowie $e \in \tilde{E}$. Aufgrund des Wegzusammenhangs von X finden wir einen Weg v von $p(e)$ nach x_0 . Dann ist $L(v, e)$ ein Weg von e mit Endpunkt in $p^{-1}(x_0)$, also $\tilde{E} \cap p^{-1}(x_0) \neq \emptyset$.

□

Ist $e \in p^{-1}(x_0)$, so ist der Orbit

$$e \cdot \pi_1(x, x_0) \cong_{\pi_1(X, x_0)\text{-Menge}} \pi_1(X, x_0) \setminus \pi_1(X, x_0)_e.$$

Also interessieren wir uns auch für Elemente aus dem Stabilisator $\pi_1(x, x_0)_e$. Hierzu ist

$$e \cdot [w] = e \iff L(w, e)(1) = e \iff L(w, e) \text{ ist Schleife an } e \iff [w] \in p_*(\pi_1(E, e)).$$

$$\text{Also ist } e \cdot \pi_1(X, x_0) \cong_{p_*(\pi_1(E, e))} \pi_1(X, x_0).$$

Beweis von Theorem 20.5. 1. Schritt Wir zeigen die essentielle Surjektivität. Sei M eine $\pi_1(X, x_0)$ -Menge. Dann ist M isomorph zu einer disjunkten Vereinigung

$$M = \bigsqcup_{i \in I} H_i \setminus \pi_1(X, x_0).$$

Mit $H_i \leq \pi_1(X, x_0)$. Nach Theorem 18.6 existieren Räume $E(H_i)$, sodass

$$p(H_i): E(H_i) \rightarrow X.$$

sowie $e_i \in p(H_i)^{-1}(x_0)$ mit

$$p(H_i)_* \pi_1(E(H_i), e_i) = H_i.$$

Dann ist $p(H_i)^{-1}(x_0)$ isomorph zu $H_i \setminus \pi_1(X, x_0)$ nach Proposition 20.9 und der Vorüberlegung. Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung

$$p := \coprod p(H_i): \coprod_{i \in I} E(H_i) \rightarrow X.$$

so ist

$$p^{-1}(x_0) = \bigsqcup p(H_i)^{-1}(x_0) \cong \bigsqcup_{i \in I} H_i \setminus \pi_1(X, x_0) \cong M.$$

Bemerkung 20.10. Es fehlt noch zu zeigen, dass p überhaupt eine Überlagerung ist, im allgemeinen ist das Koproduct von Überlagerungen nämlich *nicht* zwingend wieder eine Überlagerung. Wir müssen das also in diesem konkreten Fall noch zeigen.

Behauptung 24. Sei $x \in X$ und $x \in U \subseteq X$ eine wegzusammenhängende Umgebung mit $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ trivial. Dann ist U eine trivialisierende Umgebung für alle $p(H_i)$ und damit auch für p .

Unterbeweis. Folgt unmittelbar aus der Konstruktion, die wir gewählt hatten, denn wir haben gezeigt, dass die trivialisierenden Umgebungen genau diejenigen Basiselemente von X aus [Lemma 18.13](#) sind, und diese waren unabhängig von der Überlagerung. ■

2. Schritt Wir zeigen die Volltreue.

Injektivität Seien f, \hat{f} zwei Überlagerungsabbildungen, d.h.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow \hat{f} & \swarrow \\ & p & p' \\ & & X \end{array}$$

die unter dem Funktor das gleiche Bild haben, d.h. $f|_{p^{-1}(x_0)} = \hat{f}|_{p^{-1}(x_0)}$. Wir wollen zeigen, dass dann auch schon $f \equiv \hat{f}$. Sei $\tilde{E} \subseteq E$ eine beliebige Wegekomponente. Es genügt zu zeigen, dass $f|_{\tilde{E}} = \hat{f}|_{\tilde{E}}$.

Da X lokal wegzusammenhängend ist $p|_{\tilde{E}}: \tilde{E} \rightarrow X$ bereits eine Überlagerung nach [Theorem 17.6](#).

Es ist $\tilde{E} \cap p^{-1}(x_0) \neq \emptyset$. Sei $e \in \tilde{E} \cap p^{-1}(x_0)$. Dann sind $f|_{\tilde{E}}$ und $\hat{f}|_{\tilde{E}}$ Hebungen von

$$\begin{array}{ccc} & & E' \\ & \nearrow f|_{\tilde{E}} & \downarrow p' \\ \tilde{E} & \xrightarrow{p|_{\tilde{E}}} & X \end{array}$$

Surjektivität. Sei $\tilde{f}: p^{-1}(x_0) \rightarrow p'^{-1}(x_0)$ ein Homomorphismus von $\pi_1(X, x_0)$ -Mengen. Wir möchten zeigen, dass dieser auch schon von einer Überlagerungsabbildung $f: E \rightarrow E'$ induziert wird.

Sei wieder $\tilde{E} \subseteq E$ eine Wegekomponente, dann ist $p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}$ genau eine Bahn von $p^{-1}(x_0)$ nach ebiger Proposition.

Sei $e \in p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}$, dann ist

$$p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E} \cong \underbrace{p_*(\pi_1(E, e))}_{:=H} \setminus \pi_1(X, x_0).$$

nach der Vorüberlegung. Es ist $\tilde{f}(e) \in p'^{-1}(x_0)$.

Behauptung 25. Es ist $H \leq p'_*(\pi_1(E', \tilde{f}(e)))$.

Unterbeweis. Sei $h \in H$. Dann ist gerade

$$\tilde{f}(e).h = \tilde{f}(e.h) = \tilde{f}(e) \implies h \in \pi_1(x, x_0)_{\tilde{f}(e)}.$$

Also ergibt sich

$$H \leq \pi_1(X, x_0)_{\tilde{f}(e)} = p'_*(\pi_1(E', \tilde{f}(e))).$$

■

Nach dem **Allgemeiner Liftungssatz** existiert also eine Abbildung $f|_{\tilde{E}}: \tilde{E} \rightarrow E'$ mit $f|_{\tilde{E}}(e) = \tilde{f}(e)$.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow f|_{\tilde{E}} & \downarrow p' \\ \tilde{E} & \xrightarrow{p|_{\tilde{E}}} & X \end{array}$$

Behauptung 26. Es gilt nun sogar 'automatisch' $f|_{\tilde{E}}(e') = \tilde{f}(e')$ für alle $e' \in p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}$.

Unterbeweis. Mit **Korollar 20.12** nach der Pause. ■

Definiere nun $f: E \rightarrow E'$ durch

$$E = \coprod \tilde{E} \xrightarrow{f|_{\tilde{E}}} E'.$$

Dann ist $f|_{p^{-1}(x_0)} = \tilde{f}$ nach ebiger Behauptung. □

Lemma 20.11. Sei G eine Gruppe, M eine transitive G -Menge. N eine G -Menge, $m \in M$ und $\varphi, \varphi': M \rightarrow N$ Morphismen von G -Mengen. Dann ist bereits $\varphi \equiv \varphi'$.

Beweis. Sei $m' \in M$ beliebig. Wegen Transitivität existiert $g \in G$ mit $m.g = m'$. Also rechnen wir einfach nach:

$$\varphi(m') = \varphi(m.g) = \varphi(m).g = \varphi'(m).g = \varphi'(m.g) = \varphi'(m').$$

□

Korollar 20.12. Es gilt $f|_{\tilde{E}}(e') = \tilde{f}(e')$ für alle $e' \in p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}$.

Beweis. Folgt als Spezialfall von **Lemma 20.11** mit $G = \pi_1(X, x_0)$, $M = p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}$, $N = p'^{-1}(x_0)$ sowie $m = e$ und

$$\varphi = (f|_{\tilde{E}})|_{p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}} \quad \varphi' = \tilde{f}|_{p^{-1}(x_0) \cap \tilde{E}}.$$

□

Damit ist nun der Beweis von **Theorem 20.5** abgeschlossen.

Wir erinnern uns kurz an:

Lemma und Definition 19.1 (Decktransformation). Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung.

Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\cong]{f} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

über X . Wir bezeichnen mit $\Delta(p)$ die Menge der Decktransformationen, und diese bilden eine Gruppe.

Satz 19.9. Seien E, X, p, x_0, e_0, H wie oben.

1) Für $f \in \Delta(p)$ ist

$$\varphi(f(e_0)) \in H \backslash N_{\pi_1(X, x_0)} H.$$

2) Die Abbildung

$$\psi : \begin{array}{l} \Delta(p) \longrightarrow H \backslash N_{\pi_1(X, x_0)} H \\ f \longmapsto \varphi(f(e_0)) \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

und an den verbundenen **Theorem 19.9.**

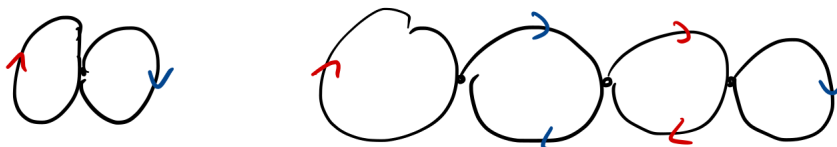


Abbildung 36: Eine Überlagerung von $S^1 \vee S^1$

Mit dem **Theorem 20.5** ergibt sich nun der folgende Alternative Beweis:

Alternativer Beweis von Theorem 19.9. Es sind $\Delta(p)$ genau die Automorphismen der Überlagerung $p: E \rightarrow X$. Nach dem Hauptsatz sind diese also isomorph zu den Automorphismen von $p^{-1}(x_0)$ als $\pi_1(X, x_0)$ -Mengen, die wiederum isomorph sind zu den Automorphismen von $p_*(\pi_1(E, e_0)) \backslash \pi_1(X, x_0)$, d.h.

$$\Delta(p) = \text{Aut} \left(\begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ X \end{array} \right) \cong \text{Aut}_{\pi_1(X, x_0)\text{-Mengen}}(p^{-1}(x_0)) \cong \text{Aut} \left(p_*(\pi_1(E, e_0)) \backslash \pi_1(X, x_0) \right).$$

□

Proposition 20.13. Es ist

$$\text{Aut}_{G\text{-Mengen}}(H \backslash G) \cong H \backslash N_G H.$$

Beweis. Sei $f: H \backslash G \rightarrow H \backslash G \in \text{Aut}(H \backslash G)$ ein solcher Automorphismus.

- 1) Dann ist f bereits eindeutig bestimmt durch $f(H)$ nach **Lemma 20.11**.
- 2) $f(H.1) \in H \backslash N_G H$. ist $f(H.1) = H.g_0$, dann ist für alle $h \in H$ auch $H.g_0 = f(H.1) = f(H.h) = f(H.1).h = H.g_0.h$.

Daraus folgt bereits, dass $\exists h_1, h_2 \in H$ mit $h_1 g_0 = h_2 g_0 h$, also nach umformen

$$h_2^{-1} h_1 = g_0 h g_0^{-1}.$$

wegen $h \in H$ beliebig ergibt sich also bereits $g_0 H g_0^{-1} \subseteq H$. Das Inverse schickt $H g_0$ auf H . Also schickt se H auf $H g_0^{-1}$. Analog zeigen wir, dass $g_0^{-1} H g_0 \subseteq H$, also auch $H \subseteq g_0 H g_0^{-1} \subseteq H$ und somit schlussendlich

$$H = g_0 H g_0^{-1} \implies g_0 \in N_G H.$$

Die Abbildung

$$f \mapsto f(H \cdot 1).$$

ist also wohldefiniert und injektiv nach 1)

- 3) Wir zeigen noch Surjektivität. Ist $g_0 \in N_G H$, so behaupten wir, dass

$$H g \mapsto H g_0 g.$$

wohldefiniert und G -äquivariant ist. Die Äquivarianz ist nach Definition offensichtlich. Für Wohldefiniertheit bilden wir ab

$$H h g \mapsto H g_0 h g \stackrel{g_0 \in N_G H}{=} H h' g_0 g = H g_0 g.$$

Da $N_G H$ eine Untergruppe ist, ist auch $g_0^{-1} \in N_G H$, also hat die Abbildung ein Inverses, und zwar

$$H g \mapsto H g_0^{-1} g.$$

□ Vorlesung 20
Do 01 Jul 2021

21 Der Satz von Seifert von Kampen

Satz 21.1 (Seifert-van-Kampen). Sei X ein Raum, seien $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, sodass $U_1 \cup U_2 = X$, und bezeichne $U_3 := U_1 \cap U_2$.

Sind U_1, U_2, U_3 wegzusammenhängend und nicht-leer sowie $x_0 \in U_3$, dann ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_3, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array} \quad l$$

ein Pushout von Gruppen, d.h. für jede Gruppe H und kompatible Morphismen $\pi_1(U_1, x_0) \rightarrow H$ sowie $\pi_1(U_2, x_0) \rightarrow H$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H$. Visualisiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_3, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Wir geben zunächst einige Erklärungen und Beispiele zu **Theorem 21.1**:

Bemerkung 21.2. Ein Pushout in Gruppen ist ein sogenanntes *amalgisiertes Produkt*, d.h.

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & G_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_1 \star_H G_2 \end{array}$$

ist ein Pushout.

Definition 21.3 (Amalgisiertes Produkt). Seien G_1, G_2 zwei Gruppen. Sind $G_i = \langle E_i \mid R_i \rangle$ Darstellungen der Gruppen, so ist das **freie Produkt** von G_1 und G_2 die Gruppe bestimmt durch

$$G_1 \star G_2 := \langle E_1 \cup E_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

,d.h. die Menge aller (endlichen) Wörter mit Elementen aus G_1 und G_2 mit den kanonischen Verknüpfungen von Elementen aus G_1, G_2 , aber keinerlei weiteren Relationen.

Sind $\varphi_1: H \rightarrow G_1$ und $\varphi_2: H \rightarrow G_2$ Gruppenhomomorphismen, so ist das **amalgasierte Produkt** von G_1 und G_2 über H (mit den Morphismen φ_1, φ_2) definiert als

$$G_1 \star_H G_2 := G_1 \star G_2 / \varphi_1(h) \sim \varphi_2(h).$$

Beispiel 21.4. Betrachte $S^1 \vee S^1$, wir wollen $\pi_1(S^1 \vee S^1, 1)$ berechnen, und haben dazu $U_1 = \iota_1(S^1)$ und $U_2 = \iota_2(S^1)$, dann sind beide offenen Mengen nichtleer und wegzusammenhängend, und es ist $U_1 \cap U_2 = \{1\}$ einelementig. Also ergibt sich

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, 1) \cong \pi_1(S^1, 1) \star_{\pi_1(\{1\}, 1)} \pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(S^1, 1) \star \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \cong F_2 = \langle a, b \rangle.$$

Mündliche Anmerkung 21.5. Eigentlich hätten wir U_1, U_2 hier offen wählen müssen, um den Satz anwenden zu können. Die Umgebung 'ein bisschen' größer zu machen zerstört aber offensichtlich nichts an der Fundamentalgruppe von S^1 , deswegen ist das in Ordnung und einfach ein formales Ausformulieren.

Beispiel 21.6 (Nicht-Beispiel). Der Wegzusammenhang ist essentiell!. Wenn wir $S^1 = D^1 \cup_{S^0} D^1$ schreiben, so ist der Schnitt nicht zusammenhängend, weswegen wir nicht die falsche Aussage

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(D^1, 1) \star_{\pi_1(S^0, 1)} \pi_1(D^1, 1) \cong \{1\} \star_{\{1\} \star \{1\}} \cong \{1\}.$$

folgern.

Es ist ebenfalls essentiell, die Offenheit zu fordern, sonst können wir z.B. S^1 einfach 'auftrennen'.

Mündliche Anmerkung 21.7. Man kann die Aussage verallgemeinern und die Annahme des Wegzusammenhangs fallen lassen, wenn man statt den Fundamentalgruppen die Fundamentalgroupoide verwendet. Das ist aber nicht unser Ziel, weil dann die Pushouts deutlich komplizierter werden.

Beispiel 21.8. Sei $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r \rangle$ eine Gruppe auf n Erzeugern und einer Relation r . Wir wollen einen Raum konstruieren, der $\pi_1(X, x_0) = G$ ergibt.

Betrachte dazu

$$Y := \bigvee_{i=1}^n S^1.$$

d.h. ein Zusammenkleben von n Schleifen, dann erhalten wir $\pi_1(Y, 1) \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ als freie Gruppe in n Erzeugern (folgt induktiv aus **Beispiel 21.4**). Wähle nun eine Schleife $S^1 \xrightarrow{f} Y$, die r repräsentiert. Definiere nun den Raum X als das Pushout

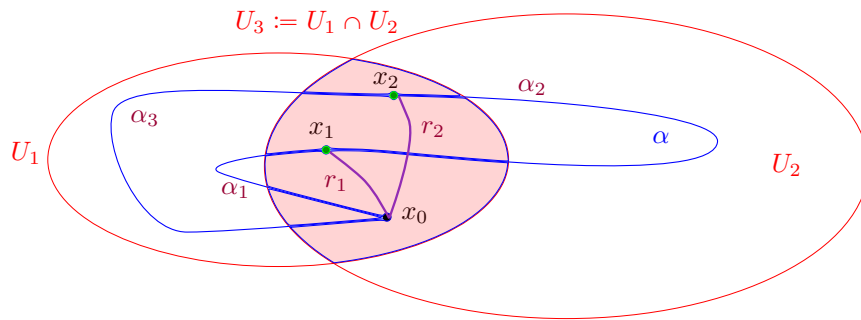
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

und betrachte

$$U_1 := D^{2^\circ}, \quad U_2 := X \setminus \{\text{Mittelpunkt von } D^2\} \simeq Y.$$

Dann ist $U_3 \cong D^{2^\circ} \setminus \{\text{Mittelpunkt}\} \simeq S^1$ und somit

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) \star_{\pi_1(U_3)} \pi_1(U_2) \cong \{1\} \star_{\mathbb{Z}} \pi_1(Y) \cong \pi_1(Y) / \langle\langle r \rangle\rangle = \langle a_1, \dots, a_n \mid r \rangle = G.$$



$$\pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Abbildung 37: Skizze zu Seifert van Kampen

Betrachte nun **Abbildung 37**, da 'sieht man' viel zur Intuition von Seifert van Kampen: Einen Weg α , der in $X = U_1 \cup U_2$ verläuft, können wir aufteilen in einzelne kleinere Wege, die in U_1 oder U_2 verlaufen. Mit Hilfspwegen r_1, r_2 machen wir daraus Schleifen an x_0 , die nun in U_1 oder U_2 verlaufen. So erhalten wir bereits zumindest eine Projektion vom freien Produkt $\pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0)$ nach $\pi_1(X, x_0)$.

Wir erinnern uns hier auch noch an **Definition 8.22**, das letztendlich auch nur ein Pushout von Räumen ist. Wir können also Seifert van Kampen auch umformulieren zu 'Seifert van Kampen erhält *schöne* Pushouts'.

Wir können diese Intuition nun in einer kombinatorischer Form ausdrücken, hierzu sei $x_0 \in U_3 := U_2 \cap U_1$ mit $U_1 \cup U_2 = X$ gegeben. Mit π_1 erhalten wir bereits ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_3, x_0) & \xrightarrow{\varphi_1} & \pi_1(U_1, x_0) \\ \varphi_2 \downarrow & & \\ \pi_1(U_2, x_0) & & \end{array}$$

Wählen wir nun Gruppendarstellungen

$$\begin{aligned} \pi_1(U_1, x_0) &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \mid r_1, \dots, r_l \rangle \\ \pi_1(U_2, x_0) &\cong \langle \beta_1, \dots, \beta_m \mid s_1, \dots, s_n \rangle \\ \pi_1(U_3, x_0) &\cong \langle \gamma_1, \dots, \gamma_p \mid t_1, \dots, t_q \rangle \end{aligned}$$

Korollar 21.9. Sei $X = U_1 \cup U_2$, $U_3 := U_1 \cap U_2$ mit U_i offen und wegzusammenhängend sowie nichtleer. Sind U_1, U_2 einfach zusammenhängend, so ist $\pi_1(X) = 1$.

Beispiel 21.10. Es ist $\pi_1(S^n) = 1$ für $n \geq 2$. Das haben wir schon einmal 'von Hand' gezeigt, mit **Abbildung 37** ist das aber sehr einfach:

Betrachte wieder N, S als den Nord- und Südpol von S^n , und setze $U_1 := S^n \setminus N \cong \mathbb{R}^n$, $U_2 := S^n \setminus S \cong \mathbb{R}^n$ (wir erinnern uns an die stereographische Projektion).

Dann ist sicherlich $S^n = U_1 \cup U_2$, und wir erhalten auch

$$U_3 := U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \{N, S\} \cong S^{n-1} \times (-1, 1).$$

Wegen $n \geq 2$ ist das nun wegzusammenhängend. Mit **Korollar 21.9** erhalten wir dann sofort, dass $\pi_1(S^n) = 1$.

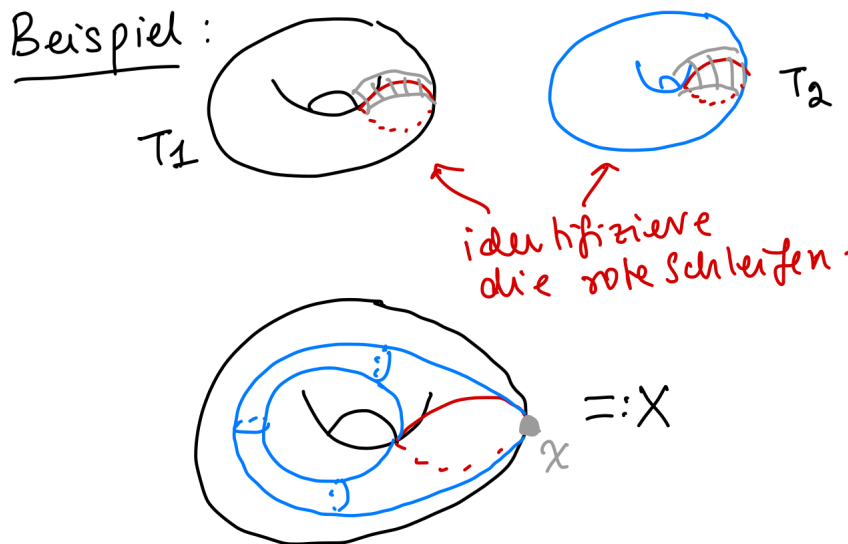
Man könnte auch direkt **Theorem 21.1** verwenden, dann ergibt sich

$$\pi_1(S^n) \cong \pi_1(U_1) \star_{\pi_1(U_3)} \pi_1(U_2) = 1 \star 1 = 1.$$

Mündliche Anmerkung 21.11. Man köme in Versuchung, einfach für U_1, U_2 die obere und untere Halbkugel zu verwenden, dann ist der Schnitt - der Äquator - ebenfalls wegzusammenhängend. Das darf man aber im allgemeinen nicht machen, wir brauchen wirklich, dass U_1, U_2 offen sind. Dass die Anwendung hier funktioniert, ist nur 'Zufall'.

Warnung. Der Beweis gilt nicht für S^1 , da $U_3 \cong S^0 \times (-1, 1)$, da S^0 nicht wegzusammenhängend ist.

Beispiel 21.12. Betrachte zwei Kopien des Torus, und identifiziere sie entlang einer Schleife.



Formal definieren wir X durch

$$X := S^1 \times S^1 \times \{1\} \sqcup S^1 \times S^1 \times \{2\} / S^1 \times \{1\} \times \{1\} \sim S^1 \times \{1\} \times \{2\}.$$

Wir würden jetzt gerne T_1, T_2 (die Tori) in X verwenden und **Seifert-van-Kampen** anwenden, aber diese sind nicht offen. Wir müssen die Tori also 'etwas' vergrößern, sodass sie offen sind, ohne dass wir die schönen Eigenschaften der Tori verlieren. Man gelangt zu:

$$A_1 := S^1 \times (e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \subseteq T_1$$

$$A_2 := S^1 \times (e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \subseteq T_2$$

$$U_1 := T_1 \cup A_2 \simeq T_1$$

$$U_2 := T_2 \cup A_1 \simeq T_2$$

Die Homotopieäquivalenz erhalten wir einfach durch stetiges zusammenziehen dieses 'angeklebten' Schlauches A_i .

Jetzt sind also U_1, U_2 offen und verhalten sich wie unsere Tori, und der Schnitt ergibt sich als $U_3 := U_1 \cap U_2 = A_1 \cup A_2$, und dieser ist auch wegzusammenhängend.

Also ergibt sich nun mit **Seifert-van-Kampen**, dass

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1, x) \star_{\pi_1(U_3, x)} \pi_1(U_2, x).$$

Da wir schon wissen, dass $\pi_1(T_1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Fundamentalgruppe des Torus ist, und das lässt sich darstellen als

$$\pi_1(T_1) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

$$\pi_1(T_2) = \langle c, d \mid cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

Man überlegt sich noch, dass $U_3 = A_1 \cup A_2 \simeq S^1$, auch indem wir die extra 'Schläuche' stetig verkürzen, also $\pi_1(U_3) = \mathbb{Z} = \langle \gamma \mid \rangle$.

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &= \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1}, a = c \rangle \\ &= \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1}, ac^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Mündliche Anmerkung 21.13. Man kann auch eine andere Darstellung von X wählen, indem wir die 'lange' Schleife von X wählen (die in Wahrheit aber natürlich Symmetrisch ist). Dann kann man sich X als 'Stapel von Donuts' vorstellen, die einfach übereinander liegen und sich kanonisch berühren. Dann sieht man auch, dass

$$X = (S^1 \vee S^1) \times S^1.$$

und wir würden schnell erhalten, dass

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \pi_1(S^1 \vee S^1) \times \pi_1(S^1) \\ &= \langle b, d \mid \rangle \times \langle a \mid \rangle \\ &= \langle a, b, d \mid aba^{-1}b^{-1}, ada^{-1}d^{-1} \rangle \end{aligned}$$

Man sieht auch leicht, dass die beiden Darstellungen, die wir erhalten haben, die gleichen Gruppen beschreiben.

Notation 21.14 (Freie Gruppen). Die Notation $\langle a \mid \rangle$ heißt natürlich, dass wir keine Relationen fordern, also $\langle a \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$. Manchmal lässt man diesen Strich dann auch weg, und schreibt einfach sofort

$$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Das darf man aber nicht verwechseln mit der von g erzeugten Untergruppe, wenn $g \in G$ bereits ein Element ist, hier erhalten wir natürlich implizit alle Relationen, die g als Element von G besitzt.

Bemerkung* 21.15. Vorlesung 21 setzt hier direkt mit CW-Komplexen, d.h. **Abschnitt 22** fort. Wir geben hier direkt den Rest von **Abschnitt 21** wieder.

Wir wollen nun noch den Satz von **Seifert-van-Kampen** beweisen, den wir noch einmal wiedergeben:

Vorlesung 22
Do 08 Jul 2021

Satz 21.1 (Seifert-van-Kampen). Sei X ein Raum, seien $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, sodass $U_1 \cup U_2 = X$, und bezeichne $U_3 := U_1 \cap U_2$.

Sind U_1, U_2, U_3 wegzusammenhängend und nicht-leer sowie $x_0 \in U_3$, dann ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_3, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array} \quad \iota$$

ein Pushout von Gruppen, d.h. für jede Gruppe H und kompatible Morphismen $\pi_1(U_1, x_0) \rightarrow H$ sowie $\pi_1(U_2, x_0) \rightarrow H$ existiert ein eindeutig bestimmter

Morphismus $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H$. Visualisiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_3, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Beweis. Das Inklusionsdiagramm induziert - da π_1 ein Funktor ist - ein kommutatives Diagramm von Gruppenmorphisimen

$$\begin{array}{ccc} U_3 \subseteq U_1 & & \pi_1(U_3, x_0) \xrightarrow{\psi_1} \pi_1(U_1, x_0) \\ \cap & \xrightarrow{\pi_1} & \downarrow \psi_2 \quad \downarrow \varphi_1 \\ U_2 \subseteq X & & \pi_1(U_2, x_0) \xrightarrow{\varphi_2} \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass das rechte Diagramm ebenfalls ein Pushout ist, und wissen bereits, dass Pushouts in Gruppen durch das amalgamierte Produkt gegeben sind, wir wollen also einen Isomorphismus

$$\pi_1(U_1, x_0) \star_{\pi_1(U_3, x_0)} \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

konstruieren. Notieren nun

$$\Psi: \pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Behauptung 27. Es ist Ψ surjektiv.

Unterbeweis. Vergleiche hierzu auch **Abbildung 37**.

Da I kompakt ist, existiert für jeden Weg $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$w_l := w|_{[\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}]} \subseteq U_i.$$

für alle l . Für alle $l \in \{1, k-1\}$ wähle einen Weg v_l von $w(\frac{l}{k})$ nach x_0 in

$$\begin{cases} U_3 & \text{falls } w(\frac{l}{k}) \in U_3 \\ U_1 & \text{falls } w(\frac{l}{k}) \notin U_2 \\ U_2 & \text{falls } w(\frac{l}{k}) \notin U_1 \end{cases}$$

Beachte hierzu, dass wir im ersten Fall natürlich verwenden, dass U_3 wegzusammenhängend ist. Setze $w_l := w|_{[\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}]}$ für $l = 0, \dots, k-1$ als die Teilstücke von w , dann können wir umschreiben:

$$\begin{aligned} [w] &= w_0 \star w_1 \star \dots \star w_{k-1} \\ &= w_0 \star (v_1 \star v_1^{-1}) \star w_1 \star (v_2 \star v_2^{-1}) \star \dots \star w_{k-1} \\ &= [w_0 \star v_1] \star [v_1^{-1} w_1 v_2] \star \dots \star [v_{k-1}^{-1} w_{k-1}] \end{aligned}$$

und jeder der geklammerten Wege verläuft nun nach Konstruktion in einem der U_i . In der unteren Zeile handelt es sich also nun um eine Verkettung aus Elementen von $\pi_1(U_1, x_0)$ und $\pi(U_2, x_0)$, also genau um ein Element aus dem freien Produkt der beiden Gruppen. ■

Wir interessieren uns natürlich im folgenden für den Kern von Ψ und wollen zeigen, dass dieser genau von den Relationen der Einbettungen ψ_1, ψ_2 erzeugt wird. Setze also

$$F : \begin{cases} \pi_1(U_3, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0) \\ r & \longmapsto & \psi_1(r)\psi_2(r)^{-1} \end{cases}$$

Warnung. F ist kein Homomorphismus, sondern erstmal nur eine Abbildung.

Behauptung 28. Der Kern von Ψ ist der normale Abschluss des Bildes von F , d.h.

$$\ker \Psi = \overline{F(\pi_1(U_3, x_0))}$$

Notation 21.16. Seien a, b Wegen in X (an x_0), dann schreiben wir

- $a \sim_{U_i} b := a, b$ sind Wege in U_i und homotop in U_i
- $a \sim_X b := a, b$ sind homotop in X .

Sei a eine Schleife an x_0 , dann notiere mit

- $[a]_{U_i} :=$ die Klasse von a in $\pi_1(U_i, x_0)$, und meine implizit, dass a in U_i liegt.
- $[a]_X :=$ die Klasse von a in $\pi_1(X, x_0)$

Damit ergibt sich z.B.

$$\psi_1([a]_{U_3}) = [a]_{U_1} \quad \psi_2([a]_{U_3}) = [a]_{U_2}$$

Für die verschiedenen Typen von Multiplikation notieren wir

- • für die Wegemultiplikation in den Fundamentalgruppen $\pi_1(U_i, x_0)$ oder $\pi_1(X, x_0)$
- \star für die Multiplikation in $\pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0)$.

Damit ergibt sich z.B.:

$$[a]_{U_1} \star [b]_{U_2} \star [c]_{U_2} = [a \bullet b] \star [c]_{U_2} \in \pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0)$$

oder auch

$$\begin{aligned} & \Psi([a_1]_{U_1} \star [a_2]_{U_2} \star \dots \star [a_m]_{U_2}) \\ &= \psi_1[a_1]_{U_1} \bullet \psi_2[a_2]_{U_2} \bullet \dots \bullet \psi_2[a_m]_{U_2} \\ &= [a_1]_X \bullet [a_2]_X \bullet \dots \bullet [a_m]_X \\ &= [a_1 \bullet \dots \bullet a_m]_X \end{aligned}$$

Sei nun

$$N := \overline{F(\pi_1(U_3, x_0))}$$

der normale Abschluss des Bildes von F . Wir wollen also $N = \ker \Psi$ zeigen.

Behauptung 29. Es ist $N \leq \ker \Psi$.

Unterbeweis. Es genügt zu zeigen, dass $F(\pi_1(U_3, x_0)) \subseteq \ker \Psi$ ist, denn $\ker \Psi$ ist normal.

Sei nun $[a]_{U_3} \in \pi_1(U_3, x_0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Psi \circ F([a]_{U_3}) &= \Psi(\varphi_1([a]_{U_3}) \star \varphi_2([a]_{U_3})^{-1}) \\ &= \Psi([a]_{U_1} \star [a]_{U_2}^{-1}) \\ &= \psi_1([a]_{U_1}) \bullet \psi_2([a]_{U_2}^{-1}) \\ &= [a]_X \bullet [a]_X^{-1} \\ &= [a \bullet a^{-1}]_X \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Behauptung 30. Es ist auch $\ker \Psi \leq N$.

Unterbeweis. Sei

$$\gamma = [a_1]_{U_1} \star [a_2]_{U_2} \star \dots \star [a_k]_{U_k} \in \pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0)$$

mit $\Psi(\gamma) = 1$, also

$$[a_1 \bullet \dots \bullet a_k]_X = 1$$

Also finden wir eine Homotopie

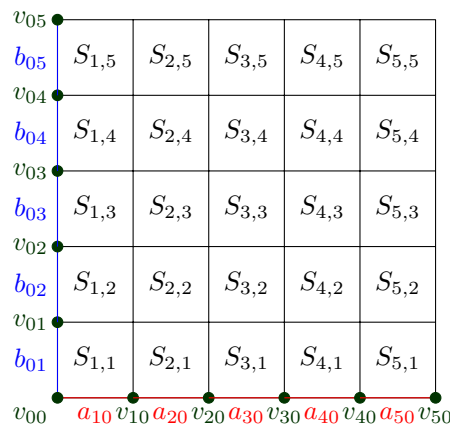
$$a_1 \bullet \dots \bullet a_k \sim_X c_{x_0}$$

zur konstanten Schleife an x_0 . Sei

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

eine solche Homotopie (relativ Endpunkten) von $a_1 \bullet \dots \bullet a_k$ nach c_{x_0} . Wir unterteilen die Homotopie nun in kleinere Einheitsquadrate, d.h. setze

$$S_{ij} := \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right]$$



Da I^2 kompakt ist, $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass jedes der S_{ij} durch H in U_1 oder U_2 abgebildet wird.

Wir wählen zudem n groß genug, sodass die Endpunkte von a_i jeweils von der Form $\frac{i'}{n}$ sind für ein $i' \in \mathbb{N}$. Setze nun

$$a_{ij} := H|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left\{\frac{j}{n}\right\}} \quad b_{ij} = H|_{\left\{\frac{i}{n}\right\} \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]} \quad v_{ij} = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

Also ist nach Definition

$$\begin{aligned} H|_{[0,1] \times 0} &= a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot \\ &= \underbrace{(a_{10} \bullet a_{20} \bullet \dots \bullet a_{p_0})}_{a_1} \bullet (a_{p+1,0} \dots) \dots \underbrace{(a_{q_0} \bullet \dots \bullet a_{r_0})}_{a_k} \end{aligned}$$

Also gilt in $\pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0)$ gerade:

$$\gamma = [a_{10} \bullet \dots \bullet a_{p_0}]_{U_1} \star [a_{p+1,0} \bullet \dots] \star \dots \star [a_{q_0} \bullet \dots]_{U_2}$$

Allerdings sind nun die einzelnen i_{ij} noch nicht zwangsweise Schleifen an x_0 , weil wir die ursprünglichen Schleifen a_i ja 'zerschnitten' haben. Wir sehen uns nun ein typisches der Quadrate S_{ij} , bzw. das zugehörige Bild in X , an. Siehe hierzu [Abbildung 38](#).

Wähle nun Wege h_{ij} von x_0 nach v_{ij} , sodass

- falls $v_{ij} \in U_l$, wähle $h_{ij} \subseteq U_l$ für $l = 1, 2, 3$.
- Falls $v_{ij} = x_0$, so wähle $h_{ij} = c_{x_0}$ konstant.

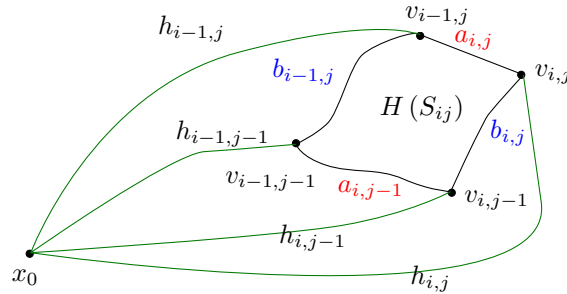


Abbildung 38: Ausschnitt Quadrat in X Seifert van Kampen

Jetzt setzen wir

- $\tilde{a}_{ij} = h_{i-1,j} \bullet a_{ij} \bullet h_{ij}^{-1}$
- $\tilde{b}_{ij} := h_{i,j-1} \bullet b_{ij} \bullet h_{ij}^{-1}$

Per Definition liegen $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij}$ in U_1 oder U_2 . Jetzt zerlegt sich auch

$$\begin{aligned} \gamma &= [a_{10} \bullet \dots \bullet a_{p_0}]_{U_1} \star \dots \star [a_{q_0} \bullet \dots \bullet a_{r_0}]_{U_2} \\ &= [\tilde{a}_{10}]_{U_1} \star [\tilde{a}_{20}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,0}]_{U_2} \end{aligned}$$

Ziel. Zeige

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1,n}]_{U_1} \star [\tilde{a}_{2,n}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,n}]_{U_2} \pmod{N}$$

Denn dann folgt wegen $[\tilde{a}_{l,n}]_{U_k} = c_{x_0} \forall l, k$, dass $\gamma^{-1} \in N$ bzw. $\gamma \in N$.

Jedes der $H(S_{ij})$ liegt in U_1 oder U_2 . Falls S_{ij} Bild in U_1 hat, liefert es eine Homotopie

$$a_{i,j-1} \sim_{U_1} b_{i-1,j} \bullet a_{i,j} \bullet b_{i,j}^{-1}$$

Mündliche Anmerkung 21.17. Hierzu brauchen wir genau genommen noch eine Reparametrisierung des Quadrates. Man überlegt sich jedoch im Allgemeinen, dass man von der klassischen Homotopie 'unterer Rand' zu 'oberer Rand' eines Quadrates auch stets eine von 'unterer Rand' zu 'restlicher Rand' erhält (in der gleichen Richtung abgelaufen!). Das verwenden wir hier.

Damit ergibt sich auch

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j-1} &= h_{i-1,j-1} a_{i,j-1} h_{i,j-1}^{-1} \\ &\sim_{U_1} h_{i-1,j-1} b_{i-1,j} a_{i,j} b_{i,j}^{-1} h_{i,j-1}^{-1} \\ &= \tilde{b}_{i-1,j} \bullet \tilde{a}_{ij} \tilde{b}_{ij}^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Eine ähnliche Aussage für Homotopieäquivalenz in U_2 erhalten wir natürlich, wenn $H(S_{ij})$ Bild in U_2 hat.

Wir führen nun einen Induktionsbeweis, dass

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1,0}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,0}]_{U_2} \equiv [\tilde{a}_{1,j}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,j}]_{U_2} \pmod{N}$$

für jedes $0 \leq j \leq n$. Für $j = 0$ ist das tautologisch, nimm die Aussage nun für $j - 1$ an.

Behauptung 31. Sei $[a]_{U_3} \in \pi_1(U_3, x_0)$. Dann ist $[a]_{U_1} \equiv [a]_{U_2} \pmod{N}$.

Unterbeweis. Rechne einfach nach, dass

$$[a]_{U_1} [a]_{U_2}^{-1} = F([a]_{U_3}) \in N$$

■

Behauptung 32. Es ist

$$x \star [a]_{U_1} \star y \equiv x \star [a]_{U_2} \star y \pmod{N}$$

Unterbeweis. Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned} &(x \star [a]_{U_1} \star y)(x \star [a]_{U_2} \star y)^{-1} \\ &= x \star [a]_{U_1} \star y \star y^{-1} \star [a]_{U_2}^{-1} \star x^{-1} \\ &= x \star \underbrace{[a]_{U_1} \star [a]_{U_2}^{-1}}_{\in N} \star x^{-1} \end{aligned}$$

Aus der Normalität von N folgt nun, dass die Konjugation mit x wieder ein Element aus N ergibt. ■

Man würde nun am liebsten sofort sukzessive **Gleichung 5** auf unsere Induktionshypothese anwenden, um den Induktionsschritt zu vollbringen. Das geht jedoch nicht unmittelbar, weil wir uns nicht aussuchen dürfen, ob wir eine Homotopie bezüglich U_1 oder U_2 erhalten. Wir könnten also folgende Situation erhalten:

Das Wort für γ enthält $[\tilde{a}_{i,j-1}]_{U_1}$, aber die zugehörige Homotopie $H(S_{i,j})$ liegt in U_2 . Dann folgt aber, dass $\tilde{a}_{i,j-1}$ sogar Bild in $U_1 \cap U_2 = U_3$ hat, dann können wir mod N mit Hilfe von **Behauptung 32** einfach U_1 durch U_2 ersetzen. Wir können also stets annehmen, dass wir **Gleichung 5** anwenden können.

Jetzt ergibt sich zusammen, dass

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv [\tilde{a}_{1,j-1}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,j-1}]_{U_2} \\ &\equiv \underbrace{[\tilde{b}_{0,j}]_{U_1}}_{\text{konstant}} \star [\tilde{a}_{1,j}]_{U_1} \star [\tilde{b}_{1,j}]_{U_1}^{-1} \star [\tilde{b}_{i,j}]_{U_1} \star \dots \star \underbrace{[\tilde{b}_{n,j}]_{U_2}^{-1}}_{\text{konstant}} \\ &\equiv [\tilde{a}_{1,j}]_{U_1} \star \dots \star [\tilde{a}_{n,j}]_{U_2} \end{aligned}$$

Mündliche Anmerkung 21.18. Auch hier sollte angemerkt werden, dass a priori die U_i der $\tilde{b}_{i,j}$ verschieden sein können, dann hilft uns aber wieder **Behauptung 32**.

Damit ist die Induktion abgeschlossen und wir haben unser Ziel erreicht. ■

Die beiden Teilschritte zeigen nun wie gewünscht $\ker \Psi = N$, und damit faktorisiert unsere Abbildung

$$\Psi: \pi_1(U_1, x_0) \star \pi_1(U_2, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

wie gewünscht über das amalgamierte Produkt über $\pi_1(U_3, x_0)$. □

Satz 21.19 (allgemeine Version von Seifert-van-Kampen (21.5 in der Vorlesung)). Sei X ein Raum, $x \in X$, und $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von X mit $x \in U_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$. Sei für $\alpha, \beta \in I$ stets $U_\alpha \cap U_\beta$ wegzusammenhängend. Die Inklusionen

$$\{\iota_\alpha: \pi_1(U_\alpha, x) \rightarrow \pi_1(X, x)\}$$

induzieren eine Abbildung

$$\psi: \coprod \pi_1(U_\alpha, x) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x).$$

Dann gilt:

- 1) ψ ist surjektiv.
- 2) Falls darüber hinaus $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ wegzusammenhängend für $\alpha, \beta, \gamma \in I$, dann ist der Kern von ψ der Normalteiler erzeugt von

$$\{\iota_{\alpha,\beta}(\omega)\iota_{\beta,\alpha}(\omega)^{-1} \mid \omega \in \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x), \alpha, \beta \in I\}.$$

wobei

$$\iota_{\alpha,\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$$

$$\iota_{\beta,\alpha}: U_\beta \cap U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$$

die Inklusionen sind.

Mündliche Anmerkung 21.20. Man kann das im Wesentlichen aus dem üblichen Satz von **Seifert-van-Kampen** folgern, indem man induktiv auf endlich viele Mengen verallgemeinert. Für unendliche Mengen macht man dann ein Kolimes-Argument, indem man ausnutzt, dass wegen Kompaktheit jeder Weg und jede Homotopie schon in endlichen vielen der U_i liegen muss.

Für einen vollständigen Beweis siehe [Hat02, Satz 1.20].

Wir werden diese allgemeine Version nicht beweisen, wir begnügen uns mit einigen Berechnungen.

Vorlesung 21
Di 06 Jul 2021

22 CW-Komplexe

Definition 22.1 (k -Zelle). Eine **k -Zelle**, $k \geq 0$, ist ein Raum der homöomorph zu D^k ist. Eine **offene k -Zelle** ist ein Raum, der homöomorph zu D^{k° ist, wobei wie üblich

$$D^k := \{(x, \dots, x_k) \mid \sum x_i^2 \leq 1\} \quad D^{k^\circ} := \{(x_1, \dots, x_k) \mid \sum x_i^2 < 1\}.$$

Wir nennen k die **Dimension** der Zelle.

Definition 22.2. CW-Komplex Ein CW-Komplex X ist ein Hausdorff-Raum, der in offene Zellen $\{c_i\}_{i \in I}$ zerfällt, wobei gilt:

Zu jeder k -Zelle $c_i \subseteq X$ existiert eine stetige Abbildung $f_i: D^k \rightarrow X$, sodass $D^{k^\circ} \subseteq D^k$ homöomorph auf c_i und der Rand $\partial D^k = S^{k-1} \subseteq D^k$ in eine Vereinigung von endlich vielen Zellen der Dimension $< k$ abgebildet wird.

1. $M \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $M \cap f_i(D^k)$ für alle $i \in I$ offen ist.

Mündliche Anmerkung 22.3. C stet für 'closure finite', und W steht für 'weak'.

Notation 22.4. Das **k -Gerüst** oder auch **k -Skelett** von X , notiert X^k , ist die Vereinigung aller seiner Zellen der Dimension $\leq k$.

Bemerkung 22.5. Jeder CW-Komplex ist normal (und Hausdorff) sowie lokal zusammenziehbar, d.h. jeder Punkt besitzt eine zusammenziehbare Umgebung.

Insbesondere ist jeder CW-Komplex

- lokal wegzusammenhängend
- (semi) lokal einfachzusammenhängend

und damit besitzt er eine universelle Überlagerung.

Frage 22.6. Wie bildet man einen CW-Komplex?

Meistens erfolgt das mit einer induktiven / rekursiven Konstruktion, indem wir nacheinander die k -Skelette spezifizieren. Wir starten mit

1. X^0 , das 0-Gerüst, ist ein diskreter Raum (Punkte sind 0-Zellen).
2. Haben wir das k -Gerüst X^k , $k \geq 0$ bereits gegeben, und eine Abbildung

$$\varphi_\alpha: \partial D^{k+1} = S^k \longrightarrow X^k.$$

so können wir eine $k + 1$ -Zelle an X^k 'ankleben'. Dazu betrachte

$$X^k \sqcup D^{k+1} / x \sim \varphi_\alpha(x) =: X^k \cup_{\varphi_\alpha} D^{k+1}.$$

so setzen wir

$$X^{k+1} := X^k \cup_{\{\varphi_\alpha\}} (D^{k+1})_\alpha.$$

indem wir alle $k + 1$ -Zellen gleichzeitig ankleben.

Bemerkung 22.7. Für endliche CW-Komplexe stimmen die Quotiententopologie und die schwache Topologie überein.

Mündliche Anmerkung 22.8. Für unendliche Räume erhalten wir genau die Kolimstopologie.

Mündliche Anmerkung 22.9. Der Hawaiianische Ohrring ist kein CW-Komplex.

Notation 22.10. Ist X ein CW-Komplex, und existiert N , sodass $X = X^N$ mit N minimal, so heißt N die **Dimension** von X .

Beispiel 22.11. Ein 1-dimensionaler CW-Komplex heißt auch **Graph**. Er besteht aus 0-Zellen und 1-Zellen. Die 0-Zellen nennen wir **Ecken** oder auch **Knoten**, die 1-Zellen **Kanten**.

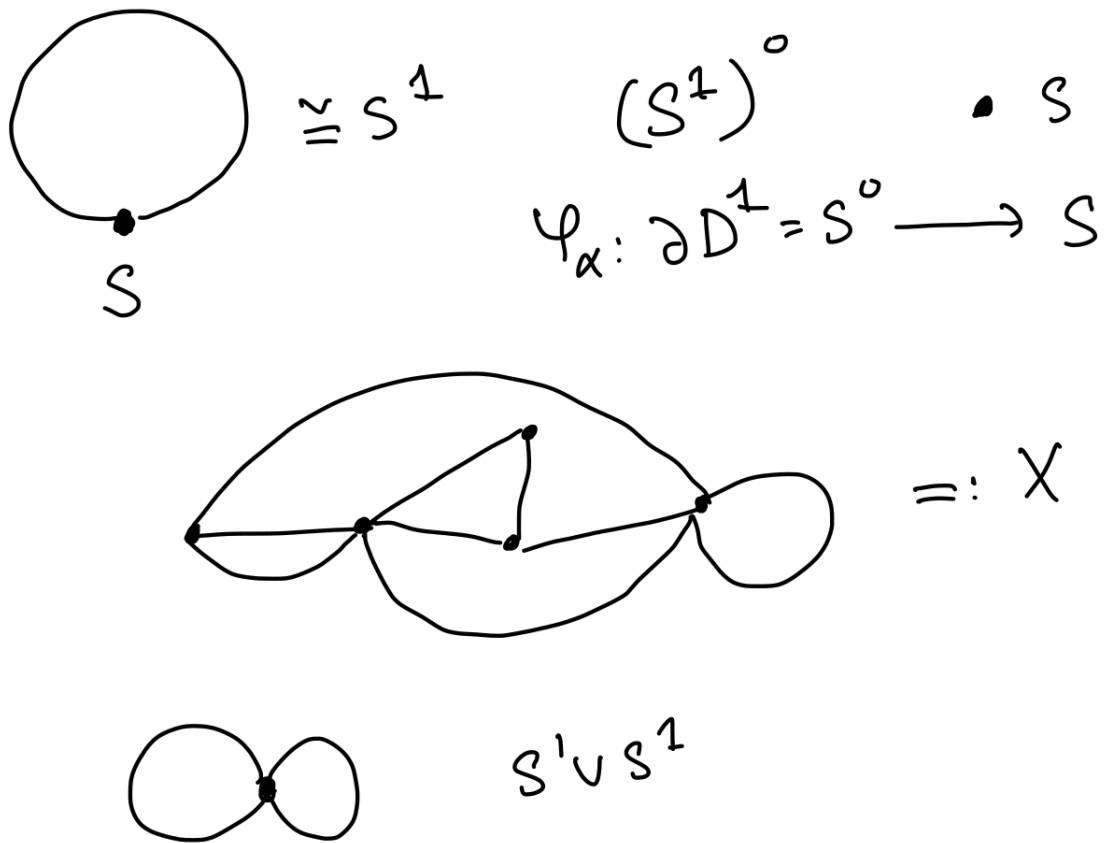


Abbildung 39: Einige Graphen als CW-Komplexe

Warnung. Man muss aufpassen, was passiert, wenn es unendlich viele Kanten in einem Punkt gib.

Beispiel 22.13 (zwei-dimensional). Für eine Skizze siehe [Abbildung 40](#).

Die Sphäre kann auch als CW-Komplex realisiert werden, indem wir eine 0-Zelle und eine 2-Zelle verwenden. Starten wir mit einem Punkt, so gibt es eine offensichtliche Abbildung $\partial D^2 \rightarrow X^0 = \{S\}$. Wir kleben dann einfach den Rand von D^2 an den Punkt und erhalten sofort die Kugel.

Alternativ kann man S^n auch induktiv aufbauen, indem wir verwenden, dass S^n der Äquator von S^{n+1} ist, und dann jeweils 2 $n + 1$ -Zellen an S^n kleben, um S^{n+1} zu erhalten.

Schauen wir nun auf $\mathbb{R}P^n := S^n / x \sim -x$, so sehen wir, dass wir die beiden Zellen, die wir für S^n bekommen haben, jeweils identifizieren. Wir können $\mathbb{R}P^n$ also realisieren als CW-Komplex mit einer 0, einer 1, \dots , und einer n -Zelle.

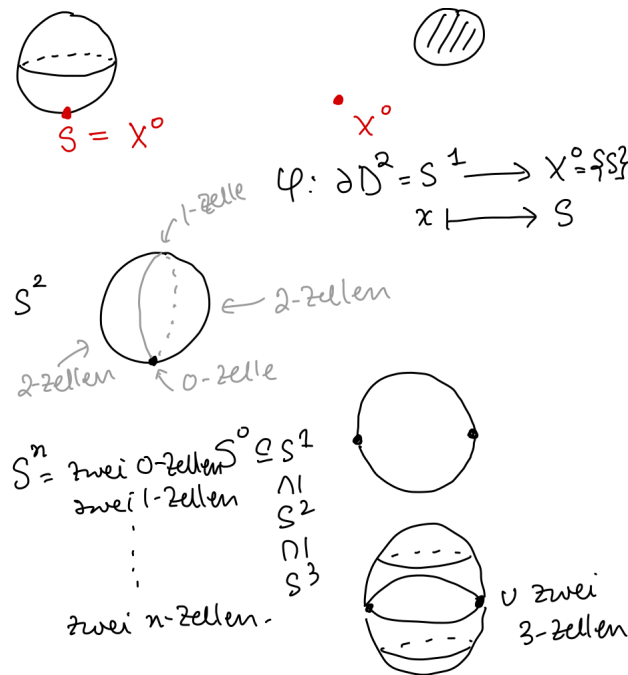


Abbildung 40: CW-Komplex von S^n

Ein weiterer toller Punkt dieser auf den ersten Blick aufwendigeren Zellstruktur für S^n ist, dass wir nun

$$S^\infty := \bigcup_{k=0}^{\infty} S^k.$$

als die unendlich-dimensionale Sphäre als CW-Komplex definiert / realisiert haben.

Der Torus kann ebenfalls so realisiert werden, hierzu benötigen wir eine 0-Zelle, zwei 1-Zellen sowie eine 2-Zelle.

Erinnern wir uns an $\mathbb{RP}^2 := S^2/x \sim -x \cong D^2/x \sim -x$ für $x \in \partial D^2$. Damit erhalten wir wieder eine Darstellung von \mathbb{RP}^2 als eine 0, eine 1 und eine 2-Zelle.

22.1 Berechnung der Fundamentalgruppe eines CW Komplexes

Satz 22.14 (Graphen). Sei X ein wegzusammenhängender Graph, und $x_0 \in X^0$, d.h.

$$X = \underbrace{\bigcup_{i \in I^0} e_i^0}_{X^0} \cup \underbrace{\bigcup_{i \in I^1} e_i^1}_{1\text{-Zellen}}.$$

Dann gilt:

Vorlesung 23
Di 13 Jul 2021

(i) Es existiert $J \subseteq I^1$, so dass

$$Y := X^0 \cup \bigcup_{j \in J} e_j^1.$$

ein maximaler **Baum** (ein zusammenziehbarer Graph, kombinatorisch: ein kreisfreier, zusammenhängender Graph) in X ist.

(ii) Für J wie in (i) gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \prod_{i \in I^1 \setminus J} \mathbb{Z} \cong \star_{i \in I^1 \setminus J} \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist die Fundamentalgruppe eines Graphen stets frei.

Mündliche Anmerkung 22.15. Auch hier begnügen wir uns mit Beispielen, und führen keinen Beweis.

Beispiel 22.16. • Betrachte folgenden Graph:

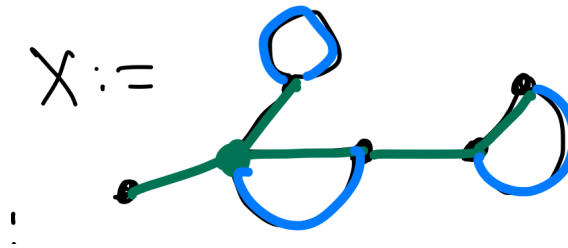


Abbildung 41: Ein Graph mit markiertem Teilbaum (grün markiert)

der grün markierte Teilgraph ist nun ein Baum. Für die Berechnung der Fundamentalgruppe ziehen wir nun den Baum zusammen, also erhalten wir noch:

$$X \simeq Y := \text{[Diagram of a figure-eight space with two loops meeting at a central point]}$$

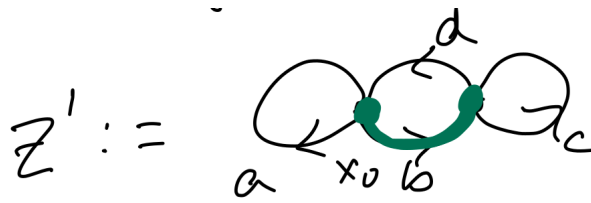
Der zusammengezogene Raum Y ist dann tatsächlich homotop zum ursprünglichen Raum X , und Y ist nun frei mit so vielen Erzeugern, wie es Kanten in $I^1 \setminus J$ gibt.

• Betrachte Z

$$\hookrightarrow x \xrightarrow{b} y \curvearrowright$$

Dann ist $\pi_1(Z) = \langle \alpha, \beta \mid \rangle$. Die Erzeuger sind gegeben durch a, bcb^{-1}

• Ist Z' der folgende Graph:

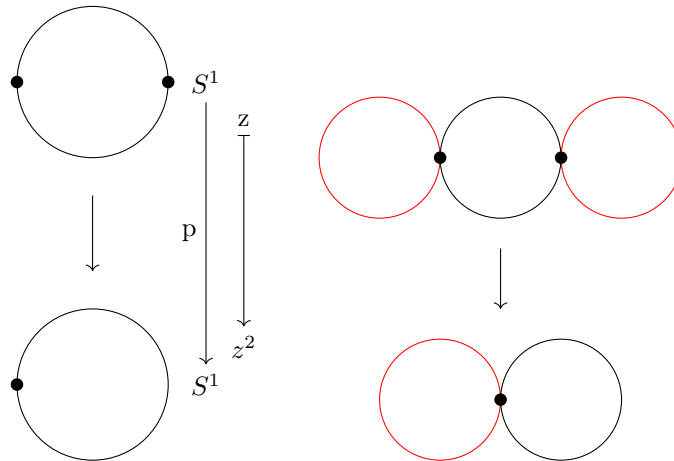


So sind die Erzeuger gegeben durch a, bcb^{-1}, bd

Vorlesung 24
Sa 18 Sep 2021

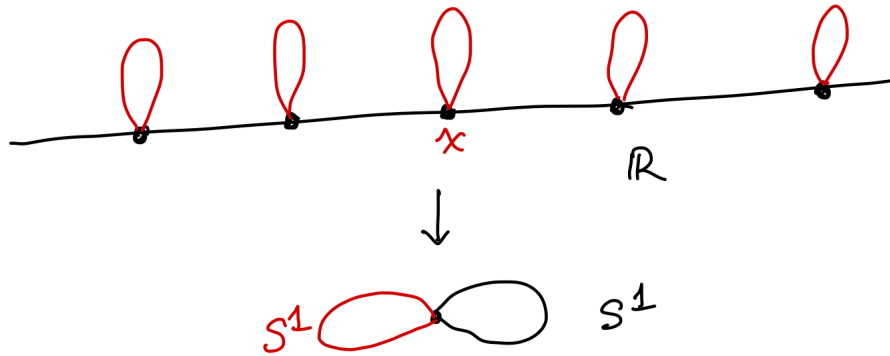
Satz 22.17. Jede Überlagerung eines CW-Komplexes ist ein CW-Komplex. Insbesondere ist eine Überlagerung eines Graphen wieder ein Graph.

Beispiel 22.18. Betrachte die Überlagerung $S^1 \rightarrow S^1$ gegeben durch $z \mapsto z^2$, d.h.



Wir sehen nun, dass die beiden Hebungen der 1-Zelle von S^1 nun die beiden 1-Zellen von E sind. Betrachte nun als zweites Beispiel die rechte Überlagerungen, wobei beide roten Zellen auf die rote abbilden, und die schwarze Zelle mittels $z \mapsto z^2$ abbildet. Dann sehen wir ebenfalls wieder jeweils die beiden Hebungen der beiden Zellen als vier 1-Zellen des Überlagerungsraums.

Beispiel 22.19. Betrachte die Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ durch $z \mapsto e^{iz}$, dann sind zunächst die Hebungen von S^1 jeweils die Intervalle $[n, n+1]$ in \mathbb{R} . Wir erweitern nun zu $S^1 \vee S^1$ und hängen die entsprechenden Schleifen an den Überlagerungsraum an. Dann ergibt sich folgendes Bild:



Beispiel 22.20 (Universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^1$). Wir betrachten nun noch die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^1$, die durch den folgenden Cayley-Graphen von F_2 gegeben ist. Man beachte, dass die 'Rekursion' im Bild zwar unendlich fortgesetzt wird, es sich allerdings dennoch nicht um die Teilraumtopologie handelt, die Punkte 'konvergieren' nicht. Wir bilden nun die horizontalen Segmente, die dem Erzeuger a entsprechen, auf den roten Kreis ab, die vertikalen auf den blauen.

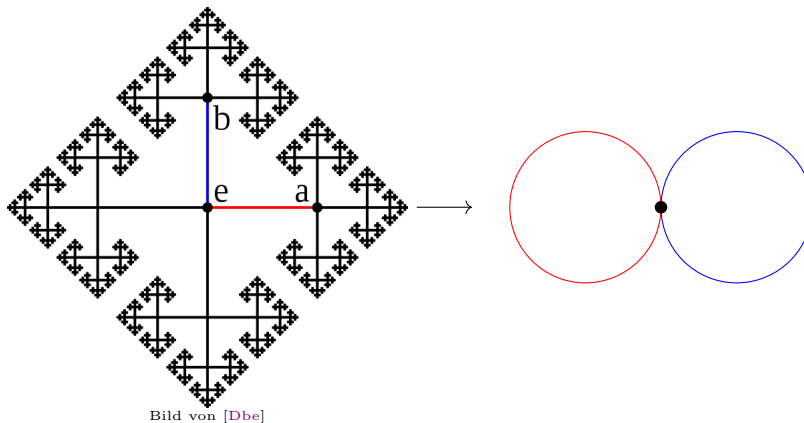


Bild von [Dbe]

Korollar 22.21. Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.

*Beweis**. Wir können die freie Gruppe durch einen Graphen mit entsprechend vielen Schleifen darstellen. Untergruppen entsprechen nun aber Überlagerungen. Solch eine Überlagerung ist aber wieder ein Graph und hat damit eine freie Fundamentalgruppe. Also ist die Untergruppe frei! \square

Satz 22.22 (2-dimensionale Komplexe). Sei X ein wegzusammenhängender Raum. Gegeben eine Familie von Abbildungen

$$\{\varphi_\alpha : \partial B^2 = S^1 \rightarrow X\}_{\alpha \in I}$$

setze

$$Y := X \bigcup_{\{\varphi_\alpha\}} \coprod_{\alpha \in I} c_\alpha^2$$

Wähle nun $x_0 \in X$, $s_0 \in \partial B^2$ und für alle α einen Weg

$$w_\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ 0 & \longmapsto & x_0 \\ 1 & \longmapsto & \varphi_\alpha(s_0) \end{array}$$

Dann ist $w_\alpha \circ \varphi_\alpha(S^1) \circ w_\alpha^{-1}$ eine Schleife an x_0 . Sei nun $N \trianglelefteq \pi_1(X)$ der Normalteiler erzeugt von

$$\{w_\alpha \varphi_\alpha(S^1) w_\alpha^{-1} \mid \alpha \in I\}$$

Die inklusionsinduzierte Abbildung

$$\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$$

ist nun surjektiv mit Kern N , d.h.

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X) / N$$

Beispiel 22.23. Wähle X als den Einpunktraum und nur eine triviale Schleife. Dann erhalten wir $Y = S^2$, weil wir B^2 entlang des Randes zu einem Punkt verkleben. Der Satz sagt uns nun also:

$$\pi_1(S^2) \cong \langle 1 \rangle / \langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

Beispiel 22.24. Wir bauen nun den Torus auf, indem wir eine Scheibe entfernen und mittels des Satzes wieder ankleben, siehe hierzu [Abbildung 42](#). Man überlegt sich nun, dass die Relation, entlang derer wir ankleben, $aba^{-1}b^{-1}$ ist, dann ergibt sich als Quotient

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(X) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

Wir wissen auch, dass wir den Torus als den Quotienten des Einheitsquadrates schreiben können, das damit eine CW-Struktur aus zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle besitzt. Erneut stellen wir fest, dass wir die 2-Zelle entlang $aba^{-1}b^{-1}$ an das 1-Skelett geklebt haben, und wir erhalten wieder \mathbb{Z}^2 als Fundamentalgruppe des Torus.

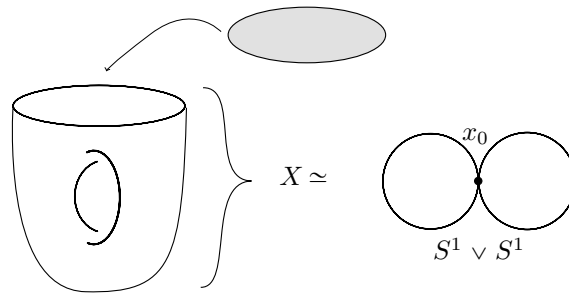


Abbildung 42: Torus als $S^1 \vee S^1$ und angeklebter B^2

Beispiel 22.25. Wir wissen, dass $\mathbb{R}P^2$ als CW-Struktur aus einer Schleife hervorgeht, wenn wir die 2-Zelle entlang $x \mapsto x^2$ ankleben. Also ergibt sich

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x) = \langle a | a^2 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Korollar 22.26. Sei G eine Gruppe. Dann existiert ein CW-Komplex mit $\pi_1(X) \cong G$.

Beweis. Sei $G = \langle E | R \rangle$ eine Darstellung der Gruppe. Setze nun $X^0 = \{x_0\}$ als das 0-Gerüst. Für jeden Erzeuger $e \in E$ kleben wir nun eine 1-Zelle an das 0-Gerüst an, wir erhalten also bereits

$$\pi_1(X^1) \cong \prod_{i \in I^1 = E} \mathbb{Z} \cong \langle E \rangle$$

Für jede Relation $r \in R$ der Form

$$r = r_1 r_2 \dots r_k$$

mit $r_i \in E$ klebe eine 2-Zelle c_r an X^1 bezüglich der Abbildung

$$\varphi_r : \begin{array}{l} \partial B^2 \longrightarrow X^1 \\ \longmapsto r_1 r_2 \dots r_k \end{array}$$

Nach [Theorem 22.22](#) sind wir nun fertig. □

Satz 22.27 (Höhere Zellen zählen nicht). Sei X wegzusammenhängend, $\varphi: \partial B^k \rightarrow X$ stetig mit $k \geq 3$. Setze

$$Y := X \bigcup_{\varphi} B^k$$

Dann ist die Inklusionsabbildung $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ ein Isomorphismus.

Korollar 22.28. Sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex und $x \in X^0$ ein Basispunkt. Dann ist

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(X^2, x)$$

wobei wir mit X^2 das 2-Gerüst von X bezeichnen.

Beispiel 22.29. Wenn wir nun $\mathbb{R}P^n$ betrachten wollen, so wissen wir, dass es sich um die gleiche 2-Struktur handelt wie die von $\mathbb{R}P^2$, also wissen wir

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Satz 22.30 (Borsuk-Ulam). Für jede stetige Abbildung $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beispiel 22.31. Betrachte z.B. die Funktion, die einem Punkt auf der Erdoberfläche seine Temperatur und seinen Luftdruck zuordnet. Dann sagt uns Borsuk-Ulam, dass es zwei Antipoden auf der Erde gibt, die den gleichen Luftdruck und die gleiche Temperatur besitzen.

Beweis. Angenommen, $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Dann ist

$$g : \begin{cases} S^2 & \longrightarrow & S^1 \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{cases}$$

wohldefiniert. Wir erhalten nun

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -g(x)$$

also faktorisiert g und wir erhalten ein \bar{g} , sodass

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\bar{g}} & \mathbb{R}P^1 \end{array}$$

Sei nun w ein Weg von $x_0 \in S^2$ zu $-x_0$. Dann ist $[p(w)] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2, p(x_0)) \cong \mathbb{Z}/2$ ein Erzeuger; die Klasse ist nicht trivial, weil ihre Hebung w keine Schleife ist. Es ist $g(w)$ ein Weg von $g(x_0)$ nach $g(-x_0) = -g(x_0)$. Also ist in $\pi_1(\mathbb{R}P^1, p(g(x_0)))$ wieder

$$0 \neq [p(g(w))] = [\bar{g}(p(w))] = \bar{g}_*[p(w)] = 0$$

Denn jede Abbildung $\mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ ist trivial. ζ □

Korollar 22.32. S^2 ist kein Teilraum von \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 22.33. Das ganze gilt auch für Abbildungen $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes $n \geq 1$.

Für $n = 1$ konstruieren wir wie oben $g: S^1 \rightarrow S^0$, und dann $g(x) = -g(x) \neq g(x)$, aber S^1 ist zusammenhängend und S^0 ist diskret. Also ist jede stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^0$ konstant.

Den Fall $n \geq 2$ werden wir in der Topologie I (oder vielleicht auch Topologie II) sehen.

23 Ausblick

Wir haben bereits den Funktor π_1 kennegelernt, der uns

$$\pi_1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

liefert. Außerdem wissen wir bereits, dass die S^n beispielsweise als Bausteine von CW-Komplexen von fundamentaler Bedeutung sind.

Ziel. Wir wollen für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Funktor F_k mit

$$F_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

konstruieren.

Warnung. Man käme in Versuchung, $F_k = \pi_k$ zu setzen, das funktioniert aber nicht, denn es ist z.B. $\pi_3(S^2) \neq 0$.

Es sei angemerkt, dass π_k trotzdem interessant, allerdings **sehr** schwer zu berechnen.

Stattdessen betrachten wir **Homologie**, notiert H_\bullet , diese ist

- schwieriger zu definieren
- relativ leicht zu berechnen, insbesondere für CW-Komplexe
- immer abelsch

Dual dazu gibt es die sogenannte **Kohomologie**, notiert H^\bullet .

- Diese hat noch mehr Struktur, z.B. eine Ringstruktur.
- Damit können wir z.B. den Fall $n \geq 2$ von Borsuk-Ulam zeigen.

In Topologie I werden wir nun H_\bullet und H^\bullet einführen und wichtige Sätze über sie beweisen.

In der Topologie II werden wir die Homologie von Mannigfaltigkeiten, insbesondere die Poincare-Dualität, untersuchen. Ebenfalls werden wir den Zusammenhang zwischen π_n und H_n untersuchen.

Teil III

Anhang

A Übungsblätter

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}d_x: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(x, y)\end{aligned}$$

stetig.

Aufgabe 1.2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ mit der euklidischen Metrik d_1 , d.h. $d_1(n, m) := |n - m|$, der diskreten Metrik d_2 und der Metrik d_3 gegeben durch $d_3(n, m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$.

- i) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 sind paarweise nicht äquivalent.
- ii) Die Metriken d_1, d_2 und d_3 induzieren dieselbe Topologie auf $\mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 1.3. Auf \mathbb{N} betrachten wir die Menge von Teilmengen $\mathcal{O}_{ko\text{-endl}}$ für die gilt: $U \in \mathcal{O}_{ko\text{-endl}}$ genau dann wenn U leer oder $\mathbb{N} \setminus U$ endlich ist.

- i) $\mathcal{O}_{ko\text{-endl}}$ ist eine Topologie auf \mathbb{N} (die ko-endliche Topologie).
- ii) Es seien $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{ko\text{-endl}}$ nicht leer. Dann ist auch $U_1 \cap U_2$ nicht leer.
- iii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist jede stetige Abbildung $f: (\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko\text{-endl}}) \rightarrow (X, d)$ konstant.
- iv) $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_{ko\text{-endl}})$ ist nicht metrisierbar.

Aufgabe 1.4. Es sei $Y = \{a, b\}$, mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$. Zudem sei X ein topologischer Raum.

- i) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn $f^{-1}(a) \subseteq X$ offen ist.
- ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned}\{\text{stetige Abbildungen } X \rightarrow Y\} &\rightarrow \{\text{offene Teilmengen in } X\} \\ f &\mapsto f^{-1}(a)\end{aligned}$$

ist bijektiv.

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1. Sei $p: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von p ist eine stetige Abbildung $s: Y \rightarrow X$ mit $p \circ s = \text{id}_Y$.

- i) Besitzt p einen Schnitt, so ist p surjektiv und die Topologie auf Y ist die Quotiententopologie bezüglich der Abbildung p .
- ii) Gib zwei verschiedene Schnitte für die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ an.

Aufgabe 2.2. Es sei X ein topologischer Raum und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Sei

- i) X_i offen für alle $i \in I$ oder
- ii) X_i abgeschlossen für alle $i \in I$ und I endlich.

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Abbildung f ist stetig.
- b) Jede der eingeschränkten Abbildungen $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$ mit $i \in I$ ist stetig.

Aufgabe 2.3. Jeder metrisierbare topologische Raum ist normal.

Aufgabe 2.4. Es sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakte Unterräume (d.h. kompakt als topologische Räume mit der Unterraumtopologie).

- i) Die Vereinigung $A \cup B \subseteq X$ ist ein kompakter Unterraum.
- ii) Wenn X Hausdorffsch ist, dann ist auch $A \cap B$ kompakt.
- iii) Die Teilraumtopologie auf \mathbb{R} als Teilraum der Gerade mit zwei Ursprüngen ist die euklidische Topologie. Also ist das Intervall $[-1, 1]$ als Teilmenge der Geraden mit zwei Ursprüngen kompakt.
- iv) Geben Sie ein Beispiel für X, A und B an, sodass A und B kompakt sind, aber $A \cap B$ nicht.

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1. Es sei X ein normaler topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum.

- i) Ist A abgeschlossen, so ist A normal.
- ii) Gib ein Beispiel für X und A , so dass A nicht normal ist.

Hinweis: Für diese Teilaufgabe heißt normal nur folgendes: Für disjunkte abgeschlossene Teilmengen B_1, B_2 gibt es disjunkte offene Umgebungen. D.h. es genügt ein Beispiel in dem X nicht notwendig Hausdorffsch ist. Beispiele mit X Hausdorffsch gibt es auch, sind aber deutlich schwieriger zu finden.

- iii) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige, surjektive und abgeschlossene Abbildung. Dann ist auch Y normal.

Hinweis: Schritte im Beweis von iii), die genau analog sind zu solchen im Beweis von Satz 5.11, müssen nicht neu bewiesen werden. Ein Verweis genügt.

Aufgabe 3.2. i) Es sei X eine Menge und \mathcal{S} eine Menge von Teilmengen von X . Sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{n_i} S_{i,k} \mid S_{i,k} \in \mathcal{S}, n_i \geq 0 \right\}.$$

Hinweis: X ist als leerer Schnitt (d.h. $n_i = 0$ für ein $i \in I$) in $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ enthalten.

- a) $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ ist eine Topologie auf X .
 b) Ist \mathcal{O} eine Topologie auf X mit $S \in \mathcal{O}$ für alle $S \in \mathcal{S}$, so gilt $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{O}$.
 ii) Es sei X ein metrischer Raum, $t > 0$. Welche der folgenden Mengen von Teilmengen von X bilden eine Basis der induzierten Topologie auf X ?
 a) $\mathcal{U}_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon < t\}$.
 b) $\mathcal{U}'_t := \{U(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > t\}$.
 c) $\mathcal{U}'' := \{U(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass $\mathcal{S} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis der euklidischen Topologie auf \mathbb{R} ist. Benutze diese um nochmal zu zeigen, dass das Einheitsintervall $[0, 1]$ kompakt ist.

Aufgabe 3.4. Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen bezeichne

$$\Gamma(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y$$

den *Graph* von f , versehen mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie auf $X \times Y$.

- i) Die Abbildung

$$p_X|_{\Gamma(f)}: \Gamma(f) \rightarrow X; \quad (x, y) \mapsto x$$
 ist eine stetige Bijektion.
 ii) $p_X|_{\Gamma(f)}$ ist genau dann offen (also ein Homöomorphismus), wenn f stetig ist.

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $U \subseteq X$ ein Unterraum.

- i) Es gilt $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$.
- ii) Sei U dicht in X , Y Hausdorffsch und $g: X \rightarrow Y$ eine weitere stetige Abbildung mit $g|_U = f|_U$, d.h. $g(u) = f(u)$ für alle $u \in U$. Dann gilt bereits $g = f$.

Aufgabe 4.2 (15 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$C_n := \bigcup_{i=0}^{\frac{3^n-1}{2}} \left[\frac{2i}{3^n}, \frac{2i+1}{3^n} \right] \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist C_n mit der Teilraumtopologie abgeschlossen. Sei $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Als Schnitt abgeschlossener Mengen ist $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Da C auch beschränkt ist, ist C kompakt. C heißt *Cantor Menge*. Weiterhin lässt sich jedes $x \in [0, 1]$ in triadischer Darstellung schreiben, d.h. als $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ mit $a_i \in \{0, 1, 2\}$.

- i) C besteht gerade aus den Punkten von $[0, 1]$ für die eine triadische Darstellung mit $a_i \in \{0, 2\}$ existiert.
- ii) Für alle Punkte in C ist die triadische Darstellung mit $a_i \in \{0, 2\}$ eindeutig.
- iii) C ist homöomorph zu $\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 2\}$.
- iv) C ist homöomorph zu $C \times C$.

Aufgabe 4.3 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung, (15 Punkte)). Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass man jeden lokal-kompakten Hausdorff-Raum durch Hinzufügen eines Punktes in einen kompakten Raum einbetten kann.

Es sei X ein topologischer Raum. X heißt *lokal-kompakt*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung $K \subseteq U$ von x gibt, die in U enthalten ist.

Es sei nun X ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Dann definieren wir die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X als $X^+ = X \cup \{\infty\}$, und nennen eine Teilmenge $U \subseteq X^+$ offen genau dann, wenn entweder $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X ist oder wenn $\infty \in U$ ist und $X^+ \setminus U \subseteq X$ kompakt ist mit der Unterraumtopologie von X .

- i) Dies definiert eine Topologie auf X^+ , mit der die Inklusion $X \rightarrow X^+$ stetig und offen ist.
- ii) X^+ ist kompakt und Hausdorffsch.
- iii) Für die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ der natürlichen Zahlen (ohne 0) mit der diskreten Topologie ist die Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\mathbb{N}_{>0}^+$ homöomorph zu $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\}$.

$n \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ ist.

- iv) Sei $s: Y \rightarrow X$ ein Schnitt einer beliebigen stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$, dann ist $s(Y)$ abgeschlossen.
- v) X ist offen in $\beta(X)$.

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (Zusammenhängend \neq Wegzusammenhängend). Es gilt laut Vorlesung, dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum auch zusammenhängend ist. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung nicht gilt.

Der Raum S sei definiert als folgender Unterraum des \mathbb{R}^2 :

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1].$$

(Mit anderen Worten: S ist der Abschluss, in \mathbb{R}^2 , des Graphen der Funktion $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ für $x > 0$.)

Zeige:

- i) Der Raum S ist zusammenhängend.
- ii) Der Raum S ist nicht wegzusammenhängend.

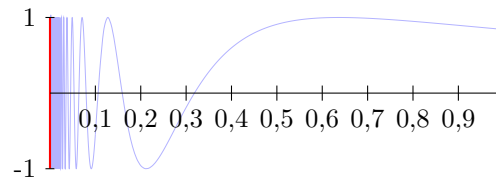


Abbildung 43: Sinuskurve des Topologen

Aufgabe 5.2. Es seien X und Y zusammenhängende Räume. Zeige:

- i) Dann ist auch $X \times Y$ zusammenhängend.
- ii) Wenn X und Y beide mehr als ein Element besitzen, dann ist auch $X \times Y \setminus \{(x, y)\}$ für ein festes $(x, y) \in X \times Y$ zusammenhängend.
- iii) Es gibt keinen topologischen Raum X , sodass \mathbb{R} homöomorph zu $X \times X$ ist.

Aufgabe 5.3. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_i)_{i \geq 1}$, $x_i \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn für jede Umgebung U von x alle bis auf endlich viele x_i in U enthalten sind. Dann heißt x *Limes* oder *Grenzwert* der Folge.

- i) Sei X Hausdorffsch. Dann ist x eindeutig.

- ii) Gib ein Beispiel einer Folge in einem topologischen Raum mit zwei unterschiedlichen Grenzwerte.
- iii) Sei $f: X \rightarrow Y$, and $(x_i)_{i \geq 1}$ eine konvergente Folge in X . Beweise oder widerlege: $(f(x_i))_{i \geq 1}$ konvergiert gegen $f(y)$.
- iv) Sei $(s_i)_{i \geq 1}$ eine Folge stetiger Funktionen $s_i: X \rightarrow Y$ und Y ein metrischer Raum. $(s_i)_{i \geq 1}$ konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Funktion $s: X \rightarrow Y$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $x \in X$, $n \geq N$ gilt $d(s_i(x), s(x)) < \varepsilon$. Zeige, dass s stetig ist.

Aufgabe 5.4. Es sei X ein topologischer Raum. Wir sagen, dass X *folgenkompakt* ist, wenn jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

- i) Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum X folgenkompakt ist.
- ii) Beweise das Lebesgue-Lemma:

Es sei X ein folgenkompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jede Teilmenge A mit Durchmesser $D < \varepsilon$ ein $i \in I$ existiert, sodass $A \subseteq U_i$ gilt.

(Der Durchmesser eines metrischen Raumes A ist $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.)

- iii) Zeige, dass ein folgenkompakter metrischer Raum X kompakt ist.

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (Der Erweiterungssatz von Tietze v.2). Sei X ein normaler Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen.

- (i) Jede stetige Funktion $f: A \rightarrow [a, b]$ mit $a < b$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\bar{f}: X \rightarrow [a, b]$.
- (ii) Nach (i) lässt sich jede stetige Funktion $f: A \rightarrow (-1, 1)$ fortsetzen zu einer stetigen Funktion $s: X \rightarrow [-1, 1]$. Setze $D := s^{-1}(-1) \cup s^{-1}(1)$. Zeige, dass es eine stetige Funktion $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ gibt mit $\varphi(D) = \{0\}$ und $\varphi(A) = \{1\}$.
- (iii) Sei $h: X \rightarrow (-1, 1)$ die Abbildung $h(x) = \varphi(x) \cdot s(x)$. Zeige, dass h tatsächlich Bild in $(-1, 1)$ hat und dass h f fortsetzt.
- (iv) Jede stetige Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich fortsetzen zu einer stetigen Funktion $\bar{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: $\mathbb{R} \cong (-1, 1)$.

Aufgabe 6.2. (i) Sei $X := \prod_{i=0}^{\infty} [0, 1]$. Definiere $D: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$D((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \sup \left\{ \frac{|x_n - y_n|}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

D ist eine Metrik auf X und induziert die Produkttopologie auf X .

- (ii) Ein kompakter Hausdorff-Raum ist metrisierbar genau dann, wenn er eine abzählbare Basis besitzt.

(Erinnerung: Kompakte Hausdorff-Räume sind normal.)

Aufgabe 6.3. (i) Sei $X := \prod_{[0,1]} \{0, 1\}$. Zeige, dass X kompakt, aber nicht folgenkompakt ist.

Hinweis: Betrachte die Folge $(a_i)_{i \geq 1}$ so dass $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)}{2^i}$.

- (ii) Gegeben sei eine total geordnete Menge (X, \leq) . Für Punkte $a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$ definiere das *Intervall* $(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$. Solche Intervalle bilden eine Basis einer Topologie auf X , die *Ordnungstopologie*. Für zwei total geordnete Mengen (X, \leq) und (Y, \leq) ist die *lexikographische Ordnung* auf $X \times Y$ definiert als: $(y_1, z_1) < (y_2, z_2)$ genau dann, wenn $y_1 < y_2$, oder $y_1 = y_2$ und $z_1 < z_2$.

Sei ω_1 die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Der *abgeschlossene lange Strahl* L wird definiert als das kartesische Produkt $\omega_1 \times [0, 1)$, ausgestattet mit der Ordnungstopologie von der lexikographischen Ordnung. (Zum Beispiel ist $\mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times [0, 1)$.) Beweise:

- (a) Jede monoton steigende Folge in L konvergiert.
 (b) Jede Folge in L hat eine monotone Teilfolge.
 (c) L ist folgenkompakt.
 (d) L ist nicht kompakt.

(*Hinweis:* Benutze ohne Beweis, dass jede steigende Folge von Ordinalzahlen konvergiert und dass ω_1 nicht der Limes einer Folge von abzählbaren Ordinalzahlen ist.)

Aufgabe 6.4. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Die Kategorie \mathcal{C}/X der Objekte über X ist die Kategorie mit Objekten $\text{ob}(\mathcal{C}/X) := \{(Y, f) \mid Y \in \text{ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)\}$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}/X}((Y, f), (Z, g)) = \{h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \mid f = g \circ h\}$, d.h. solche Abbildungen, die mit f und g kommutieren. Analog ist die Kategorie X/\mathcal{C} der Objekte unter X die Kategorie mit Objekten $\text{ob}(X/\mathcal{C}) := \{(Y, f) \mid Y \in \text{ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)\}$ und $\text{Mor}_{X/\mathcal{C}}((Y, f), (Z, g)) = \{h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \mid h \circ f = g\}$, d.h. wieder solche Abbildungen, die mit f und g kommutieren.

- (i) Zeige, dass \mathcal{C}/X und X/\mathcal{C} mit der offensichtlichen Verknüpfung von Morphismen tatsächlich Kategorien sind.
 (ii) Sei $*$ \in **Top** ein Einpunktraum. Zeige **Top**/ $*$ isomorph zu **Top** und $*$ /**Top** isomorph zu **Top** $*$, wobei **Top** $*$ die Kategorie der punktierten topologischen Räume ist.

Bemerkung: Im Englischen heißen \mathcal{C}/X und X/\mathcal{C} overcategory bzw. undercate-

gory. Im Deutschen ist aber zumindest Unterkategorie missverständlich.

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1. Sei \mathcal{C} eine Kategorie.

- (i) Terminale Objekte in \mathcal{C} sind eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.
- (ii) Sei I eine kleine Kategorie und $X: I \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Sind (L, s_i) und (L', s'_i) Limiten von X , so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $f: L \rightarrow L'$ mit $s'_i \circ f = s_i$ für alle $i \in \text{ob}(I)$.

Hinweis: Die analoge Aussage gilt für initiale Objekte und Kolimiten.

Aufgabe 7.2. Für $X \in \text{ob}(\mathbf{Top})$ sei $\pi_0(X) \in \text{ob}(\mathbf{Set})$ die Menge der Wegekomponeenten von X , d.h. die Menge der maximalen wegzusammenhängenden Teilräume.

- (i) Definiere π_0 auf Morphismen derart, dass $\pi_0: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein Funktor ist.
- (ii) Gib eine natürliche Transformation vom Vergissfunktor $F: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ nach π_0 an.

Aufgabe 7.3. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist genau dann eine Äquivalenz, wenn

- i) F ist *essenziell surjektiv*, d.h. für alle $X \in \text{ob}(\mathcal{D})$ existiert ein $Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, so dass $F(Y)$ und X isomorph sind, und
- ii) F ist *volltreu*, d.h. für alle $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ist $F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ eine Bijektion.

Hinweis: Zur Konstruktion des Inversen wähle für jedes X ein Y und einen Isomorphismus $f: F(Y) \rightarrow X$.

Aufgabe 7.4. Sei I eine kleine Kategorie und $X: I \rightarrow \mathbf{Top}$ ein Funktor.

- (i) Der Raum $\{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid h(x_i) = x_j \ \forall h \in \text{Mor}_I(i, j)\}$ zusammen mit den von den Projektionen induzierten Abbildungen ist ein Limes von X . Also ist \mathbf{Top} *vollständig*, d.h. alle Limiten in \mathbf{Top} existieren.
- (ii) Der Raum $\prod_{i \in I} X_i / \sim$ mit der Äquivalenzrelation erzeugt von $h(x_i) \sim x_j$ für alle $h \in \text{Mor}_I(i, j)$ zusammen mit den von den Inklusionen induzierten Abbildungen ist ein Kolimes von X . Also ist \mathbf{Top} *kovollständig*, d.h. alle Kolimiten in \mathbf{Top} existieren.

8. Übungsblatt

Erinnerung: Ab jetzt sind alle Abbildungen stetig.

Aufgabe 8.1. i) Die Homotopiekategorie **hTop** ist tatsächlich eine Kategorie, d.h. Komposition von Homotopieklassen von Abbildungen ist wohldefiniert.

ii) Die Isomorphismen in **hTop** sind gerade die Homotopieäquivalenzen, d.h. für $f: X \rightarrow Y$ ist $[f] \in \text{Mor}_{\mathbf{hTop}}(X, Y)$ genau dann ein Isomorphismus, falls $g: Y \rightarrow X$ existiert mit $g \circ f \sim \text{id}_X$ und $f \circ g \sim \text{id}_Y$.

Aufgabe 8.2. Es seien (X, x) und (Y, y) zwei punktierte topologische Räume. Zeige, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

gibt.

Aufgabe 8.3. Sei X ein topologischer Raum.

i) Der Kegel $CX := (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ ist *zusammenziehbar*, d.h. homotopieäquivalent zum Einpunktraum.

ii) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung genau dann, wenn $F: CX \rightarrow Y$ existiert mit $f(-) = F(-, 0)$.

iii) CS^n ist homöomorph zu D^{n+1} , insbesondere ist eine Abbildung $f: S^n \rightarrow X$ genau dann homotop zu einer konstanten Abbildung, wenn f sich auf D^{n+1} fortsetzen lässt.

Aufgabe 8.4. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass punktierte Abbildungen $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ Gruppenhomomorphismen $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ induzieren.

i) Wenn zwei punktierte Abbildungen $f, g: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ punktiert homotop sind, dann stimmen die induzierten Abbildungen f_* und g_* überein.

ii) Für punktiert homotopieäquivalente Räume (X, x) und (Y, y) , d.h. es gibt punktierte Abbildungen in beide Richtungen, deren Kompositionen punktiert homotop zu den Identitäten sind, sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(Y, y)$ isomorph.

iii) $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong 0$.

9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1. i) Es seien $p: E \rightarrow X$ und $p': E' \rightarrow X'$ Überlagerungen. Dann ist auch die Produkt-Abbildung

$$p \times p': E \times E' \rightarrow X \times X'$$

eine Überlagerung. Wie hängt die Blätterzahl der Produkt-Überlagerung von den ursprünglichen Blätterzahlen ab?

- ii) Es seien $f: Y \rightarrow X$ und $p: E \rightarrow X$ stetige Abbildungen. Erinnerung: Das *Faserprodukt* $Y \times_X E$ ist der Unterraum

$$Y \times_X E = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\},$$

mit der Teilraumtopologie der Produkttopologie auf $Y \times E$ zusammen mit den Projektionen auf Y und E .

Zeige, dass

$$Y \times_X E \rightarrow Y, \quad (y, e) \mapsto y$$

eine Überlagerung ist, falls die Abbildung $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. Wie hängt die Blätterzahl dieser *zurückgezogenen Überlagerung* von der Blätterzahl von p ab?

- iii) Es sei nun $U \hookrightarrow X$ die Inklusion eines Unterraums und $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann ist die Überlagerung $U \times_X E \rightarrow U$ aus ii) homöomorph zu $p^{-1}(U) \rightarrow U$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} U \times_X E & \xrightarrow{\cong} & p^{-1}(U) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & U \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ p|_{p^{-1}(U)} \end{array}$$

Aufgabe 9.2. Es seien X, Y und Z topologische Räume und $q: X \rightarrow Y$ und $p: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen.

- i) Wenn p und q Überlagerungen sind und zudem p endliche Blätterzahl hat, dann ist auch $p \circ q$ eine Überlagerung.
- ii) Ist Z lokal wegzusammenhängend, q surjektiv und sind p und $p \circ q$ Überlagerungen, dann ist auch q eine Überlagerung.

Aufgabe 9.3. Berechne $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)$ für alle $n \geq 1$ und einen beliebigen Basispunkt x_0 .

Aufgabe 9.4. Zeige, dass $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ nicht abelsch ist. Da $S^1 \vee S^1$ wegzusammenhängend ist, hängt die Aussage nicht von der Wahl von x_0 ab.

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}(X)$ die Menge der *freien* Homotopieklassen von Schleifen in einem Raum X , also Homotopieklassen stetiger Abbildungen

$f: S^1 \rightarrow X$, wobei Basispunkte keine Rolle spielen.

- i) Für jeden Basispunkt $x \in X$ induziert das „Vergessen des Basispunktes“ eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \mathcal{S}(X).$$

- ii) Die Vergiss-Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn X wegzusammenhängend ist.
- iii) Zwei Elemente aus $\pi_1(X, x)$ haben genau dann dasselbe Bild unter der Vergiss-Abbildung, wenn sie in der Gruppe $\pi_1(X, x)$ konjugiert sind. Das heißt, dass $w, w' \in \pi_1(X, x)$ genau dann dasselbe Bild in $\mathcal{S}(X)$ haben, wenn ein $\gamma \in \pi_1(X, x)$ existiert, sodass $w = \gamma * w' * \gamma^{-1}$.
- iv) Folgere, dass die Vergiss-Abbildung

$$\pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathcal{S}(S^1)$$

für $X = S^1$ eine Bijektion ist.

Aufgabe 10.2 (Brouwer'scher Fixpunkt-Satz). Jede stetige Selbstabbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ der Kreisscheibe D^2 hat einen Fixpunkt.

Hinweise:

- i) Zeige, dass der Kreis S^1 nicht Retrakt der Kreisscheibe D^2 ist, dass also keine stetige Abbildung $r: D^2 \rightarrow S^1$ existiert, sodass $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ die Identität auf S^1 ist.
- ii) Angenommen es gäbe eine stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ ohne Fixpunkt. Konstruiere aus diesem f eine neue Abbildung $g: D^2 \rightarrow S^1$ wie folgt: g bildet einen Punkt $x \in D^2$ auf denjenigen Kreispunkt ab, der auf der Geraden durch x und $f(x)$ auf der Seite von x liegt. Zeige, dass dieses g eine wohldefinierte und stetige Abbildung ist.

Bemerkung Der Brouwer'sche Fixpunktsatz gilt auch für Selbstabbildungen von D^n . Man kann denselben Beweis verwenden, sobald man eine angemessene Verallgemeinerung der Fundamentalgruppe auf höhere Dimensionen hat. Mit zwei solchen Invarianten, Homologie- und Homotopiegruppen, werden sich die nächsten Topologiekurse beschäftigen.

Aufgabe 10.3. Klassifiziere bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p: E \rightarrow S^1 \vee D^1$, deren Totalraum E kompakt und wegzusammenhängend ist. Dabei soll jeweils ein explizites Model konstruiert werden.

Aufgabe 10.4. Es sei G eine topologische Gruppe (z.B. eine Lie-Gruppe), das

heißt eine Gruppe (G, \cdot, e) mit einer Topologie auf der unterliegenden Menge von G , sodass die Multiplikation

$$\cdot: G \times G \rightarrow G$$

und die Bildung von Inversen

$$(-)^{-1}: G \rightarrow G$$

stetig sind. Zeige, dass $\pi_1(G, e)$ eine abelsche Gruppe ist.

Hinweis: Zeige folgendes Resultat, welches als *Eckmann-Hilton Argument* bekannt ist:

Es sei G eine Menge mit zwei Verknüpfungen \cdot und $*$ und Elementen e und e' , sodass sowohl (G, \cdot, e) als auch $(G, *, e')$ Gruppen sind. Es gelte zudem für alle $a, b, c, d \in G$ die Austauschrelation

$$(a \cdot b) * (c \cdot d) = (a * c) \cdot (b * d).$$

Zeige, dass dann $e = e'$ gilt, die Multiplikationen \cdot und $*$ übereinstimmen und die Gruppe G mit dieser Multiplikation abelsch ist.

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1. Es sei G eine Gruppe und E ein G -Raum, d.h. E ist eine rechts G -Menge, so dass die Abbildung $c_g: E \rightarrow E$, $e \mapsto eg$ stetig ist für alle $g \in G$. Die G -Wirkung heißt *frei und eigentlich diskontinuierlich* falls jeder Punkt $e \in E$ eine Umgebung U besitzt, so dass für alle $g \in G \setminus \{1\}$ gilt, dass $U \cap Ug = \emptyset$. Wir bezeichnen mit E/G den Quotientenraum von E nach der Äquivalenzrelation $e \sim eg$ für alle $e \in E$ und $g \in G$.

- i) Für jede freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe G auf einem Raum E ist die Quotientenraumprojektion

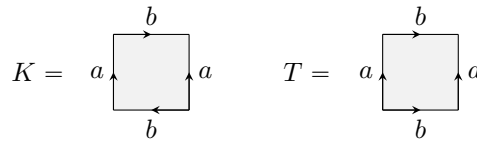
$$E \rightarrow E/G$$

eine Überlagerung.

- ii) Sei E ein einfach-zusammenhängender Raum, auf dem eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt. Für $e \in E$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(E/G, e)$ isomorph zu G .
- iii) Die Wirkung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf \mathbb{R}^2 aus der Vorlesung ist frei und eigentlich diskontinuierlich.

Aufgabe 11.2. Es bezeichne $K = [0, 1] \times [0, 1]/((x, 0) \sim (x, 1) \text{ und } (0, y) \sim (1, 1-y))$ die Kleinsche Flasche und $T = [0, 1] \times [0, 1]/((x, 0) \sim (x, 1) \text{ und } (0, y) \sim (1, y))$ den Torus. Da $T \cong S^1 \times S^1$ gilt $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$ für jeden Basispunkt

$x_0 \in T$.



Es seien $n, m > 0$ zwei ganze Zahlen. Wir betrachten die Teilmenge

$$n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z} = \{(nk, ml) \mid k, l \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

- i) $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Diese ist für m gerade isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und für m ungerade isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.
- ii) Konstruiere (notwendigerweise $(n \cdot m)$ -blättrige) zusammenhängende Überlagerungen $p_{n,m}: T \rightarrow K$ für m gerade und $p_{n,m}: K \rightarrow K$ für m ungerade, sodass die charakteristische Untergruppe in $\pi_1(K, *) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ genau $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ ist.

Bemerkung: Nicht jede Untergruppe von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat die Form $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$. Jedoch hat jede endliche Überlagerung der Kleinschen Flasche als Totalraum entweder den Torus oder die Kleinsche Flasche selbst, d.h. alle Untergruppen von endlichem Index sind isomorph zu \mathbb{Z}^2 oder $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Aufgabe 11.3. Sei $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung von zusammenhängenden und lokal weg-zusammenhängenden Räumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- i) Es gibt ein $x \in X$ so dass die Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$ wirkt.
- ii) Für alle $x \in X$ wirkt die Decktransformationsgruppe $\Delta(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x)$.
- iii) Es gibt ein $e \in E$ so dass die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(e))$ ist.
- iv) Für alle $e \in E$ ist die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(E, e))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(e))$.
- v) Die von p induzierte Abbildung

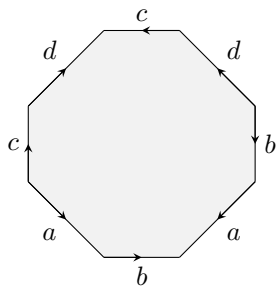
$$E/\Delta(p) \rightarrow X$$

ist ein Homöomorphismus, wobei $E/\Delta(p)$ den Quotientenraum von E nach der Wirkung der Decktransformationsgruppe bezeichnet.

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, heißt die Überlagerung *normal* (oder auch *regulär*).

Aufgabe 11.4. Die orientierbare Fläche vom Geschlecht 2 ist folgender Quotient

des Oktogons. Berechne die Fundamentalgruppe mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen.



Stichwortverzeichnis

- G -Menge, 153
- H -Äquivalent, 143
- k -Zelle, 179
- n -Sphäre, 17
- (Naive) Homotopiekategorie **hTop**, 106

- Abelisierung, 97
- Amalgasierte Produkt, 167
- Auswahlaxiom, 88

- Bahn, 157
- Basis, 38
- Basispunkt, 91
- Baum, 183
- Bouquet von 2 Kreisen, 66

- Charakteristische Untergruppe, 138, 155

- Decktransformation, 149, 165
- Diagonale von X , 48
- Diagramme, 98
- Dimension, 179, 180
- Disjunkte Vereinigung, 58

- Ecken, 180
- Einbettung, 53
- Einheitsintervall, 19
- Einheitskreis, 17
- Einhängung, 104
- Einpunktvereinigung, 65

- Faser über x , 114, 117
- Faserprodukt, 101
- Freie abelsche Gruppe, 93
- Freie Produkt, 167
- Fundamentalgruppe, 109
- Fundamentalgruppoid, 113

- G -Objekt, 103
- Gelöschte Tychonoff-Planke, 67
- Gerade mit zwei Ursprüngen, 30
- Graph, 180
- Gruppe
 - innerer Automorphismus, 113
 - Konjugation, 113
- Gruppoid, 113

- Hawaiianische Ohrring, 142
- Hilbert-Würfel, 84
- Homologie, 189
- Homomorphismus von G -Mengen, 153
- Homotop, 105, 106
- Homotop relativ A , 106
- Homotopie, 105
- Homotopieäquivalent, 106
- Homotopieäquivalenz, 106
- Homöomorphismus, 17
 - homöomorph, 17

- Isomorphismus, 92

- K , 179
- Kanten, 180
- Kardinalzahl
 - unerreichbare, 88
- Kategorie, 89
 - Funktor, 88, 92
 - vergesslicher, 92
 - Isomorphismus, 91
 - Morphismus, 89
 - Objekt, 89
 - Unter-, 91
 - volle, 91
- Kategorientheorie, 88
- Kegel, 99
- Kegelkategorie, 99
- Klasse, 89
- Kleinsche Flasche, 20
- Knoten, 180
- Kohomologie, 189
- Kokegel, 102
- Kolimes, 102
- Kommutatives Diagramm, 90
- Kommutator, 97
- Kompaktifizierung, 53
- Kontravarianter, 93
- Konvergenz
 - gleichmäßige, 80
- Koprodukt, 103

- Lebesguezahl, 121
- Lokal wegzusammenhängend, 131
- Lokaler Homöomorphismus, 116

- Menge, 89

- abgeschlossen, 14
- Abschluss, 53
- dicht, 53
- offen, 11
- saturiert, 35
- Metrik, 8
 - diskrete, 9
 - äquivalente, 12
- Metrischer Raum, 8
 - offene Menge, 9
- Natürliche Transformation, 94
- Natürliche Äquivalenz, 94
- Normalisator, 150
- Offene k -Zelle, 179
- Offener ε -Ball um x , 9
- Orbit, 157
- Produktkategorie, 103
- Projektion, 51
 - kanonische, 17
- Pushout, 103
- Raum
 - reell projektiv, 22
- Schleife, 107
- Semilokal einfachzusammenhängend, 141
- Sierpinski-Raum, 12
- Smash-Produkt, 66
- Stabilisator, 157
- Stereographische Projektion, 129
- Stetig, 8, 11
 - in $x \in X$, 8
- Stone-Čech-Kompaktifizierung, 55
- Subbasis, 38
- Terminales, 98
- Topologie, 11
 - diskrete, 11
 - indiskrete, 12
 - induzierte, 11
- Produkt-, 41
- Quotienten-, 18
- Teilraum-, 15
- Unterraum-, 15
- von \mathcal{S} erzeugte, 38
- Topologischer Raum, 11
 - einfach zusammenhängend, 126
 - Hausdorff, 23
 - Hausdorff'sch, 23
 - kompakt, 28
 - metrisierbar, 11
 - normal, 25
 - regulär, 27
 - vollständig regulär, 53
 - wegzusammenhängend, 72
 - zusammenhängend, 71
- Transitiv, 156
- Trennungsaxiom
 - T_1 , 24
 - T_2 , 23
 - T_3 , 27
 - T_4 , 25
- Umgebung, 9
 - von x , 13
- Universell, 142
- Wedge-Produkt, 65
- Weg, 71, 72
 - Hebung, 119
 - Lift, 119
- Äquivalenz, 94
- Äquivalenzklasse, 17
 - Menge der, 17
- Überlagerung, 114
 - Basis, 117
 - Basisraum, 117
 - Blätterzahl, 117
 - Totalraum, 117
 - trivial, 115
 - Überlagerungsabbildung, 117
 - Überlagerungsprojektion, 117

Bildquellen

- [Dbe] Dbenbenn. *Cayley graph of F2*. Public Domain. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cayley_graph_of_F2.svg.
- [Ind] Inductiveload. *Klein Bottle Folding*. Public Domain. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klein_Bottle_Folding_1.svg.
- [Mel] Melchoir. *Suspension*. Own work (transferred from en.wikipedia), inspired by [Hat02], CC BY-SA 3.0. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Suspension.jpg>.
- [unk] unknown. Taken from this [article](#), retrieved 2021-06-09. Fair use. URL: [http://3.bp.blogspot.com/_swN7VcF-Vqc/TCpcMmi8qII/AAAAAAAAAHw/3QtMkZsikapY/s1600/part1\(6\).png](http://3.bp.blogspot.com/_swN7VcF-Vqc/TCpcMmi8qII/AAAAAAAAAHw/3QtMkZsikapY/s1600/part1(6).png).

Literatur

- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2002. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Koe18] Peter Koepke. *Set Theory*. Bonn, 2018. URL: http://www.math.uni-bonn.de/ag/logik/teaching/2018WS/set_theory/current_scriptum.pdf.
- [Lei14] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1107044241. URL: <https://arxiv.org/abs/1612.09375>.
- [Lyn70] Jr. Lynn Arthur Steen J. Arthur Seebach. *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, 1970. ISBN: 0-486-68735-X.
- [Mun18] James Munkres. *Topology (Classic Version), 2nd Edition*. Pearson, 2018. ISBN: 978-0131816299.